2024 年浙江省预赛第 11 题背景分析

2024-05-28　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_de55a2e87ea78122

2024 年浙江省预赛的第 11 题如下：

设 n 为正整数，且

$\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k \mathrm{C}_n^k}{k^3+9k^2+26k+24} = \frac{1}{312}$,

则 $n =$_____.

参考答案利用了组合恒等式进行变形，见文末.

这里对本题的背景进行分析.

首先观察到分母可以进行因式分解：

$k^3+9k^2+26k+24 = (k+2)(k+3)(k+4)$

这是连续的三个整数之积，结合分子中的组合数 C_n^k，我们构造函数：

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \mathrm{C}_n^k}{(k+2)(k+3)(k+4)} \cdot x^{k+4}$

对 $f(x)$ 求三次导数，可将分母完全约去：

$f'''(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k x^{k+1}$

进一步地，右边提出 x 后为二项式定理：

$f'''(x) = x\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k (-x)^k = x(1-x)^n$

下面我们对 $x(1-x)^n$ 重新求三次不定积分，作换元 $x = 1-t$，则

$x(1-x)^n \mathrm{d}x = (1-t)t^n \mathrm{d}(1-t) = (t-1)t^n \mathrm{d}t$

易得

$$\begin{aligned} G(t) =& \frac{t^{n+4}}{(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{t^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ =& \frac{[(n+1)t-(n+4)]t^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

的三阶导数即为 $(t-1)t^n$.

将其中的 t 换回 $1-x$，即得

$F(x) = \dfrac{-[(n+1)x+3](1-x)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$

的三阶导数也为 $x(1-x)^n$（容易验证）.

于是多项式 $F(x)$ 和 $f(x)$ 的三阶导数相同，这说明 $F(x)$ 和 $f(x)$ 的三次及以上的项均相同.

本题要算的 $f(1)$ 为 $f(x)$ 各项系数之和，而 $F(1) = 0$，即 $F(x)$ 各项系数之和为 0.

注意到

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \mathrm{C}_n^k}{(k+2)(k+3)(k+4)} \cdot x^{k+4}$

的二次项、一次项、常数项系数均为 0.

故只需计算 $F(x)$ 的二次项、一次项、常数项系数之和，并求其相反数，$(\mathrm{mod}\ x^3)$ 可得 $F(x)$ 二次及以下的项.

$$\begin{aligned}F(x)&=\frac{-[(n+1)x+3](1-x)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\\&\equiv\frac{-[(n+1)x+3][1-(n+3)x+\mathrm{C}_{n+3}^2x^2]}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\\&\equiv-\frac{3-(2n+8)x+\frac{(n+3)(n+4)}{2}x^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\pmod{x^3}\end{aligned}$$

在上式中，令 $x=1$，得

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\mathrm{C}_n^k}{k^3+9k^2+26k+24}\\=&\frac{3-(2n+8)+\frac{(n+3)(n+4)}{2}}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\\=&\frac{1}{2(n+3)(n+4)}\end{aligned}$$

令 $\dfrac{1}{2(n+3)(n+4)}=\dfrac{1}{312}$，得 $n=9$ 或 $n=-16$（舍去）.

参考答案如下：

解：$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^kC_n^k}{k^3+9k^2+26k+24}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\left(C_{n+1}^{k+1}-C_n^{k+1}\right)}{(k+2)(k+3)(k+4)}$

$=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left[\frac{(n+1)!}{(k+4)!(n-k)!}-\frac{n!}{(k+4)!(n-k-1)!}\right]$

$=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{(-1)^k}{(n+2)(n+3)(n+4)}C_{n+4}^{k+4}-\frac{(-1)^k}{(n+1)(n+2)(n+3)}C_{n+3}^{k+4}\right]$

$=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n+4}(-1)^kC_{n+4}^k-1+C_{n+4}^1-C_{n+4}^2+C_{n+4}^3\right]$

$-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n+3}(-1)^kC_{n+3}^k-1+C_{n+3}^1-C_{n+3}^2+C_{n+3}^3\right]$

$=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}\left[(n+1)\left(-1+n+4-\dfrac{(n+4)(n+3)}{2}+\dfrac{(n+4)(n+3)(n+2)}{6}\right)\right.$

$\left.-(n+4)\left(-1+n+3-\dfrac{(n+3)(n+2)}{2}+\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{6}\right)\right]$

$=\dfrac{1}{2(n+3)(n+4)}=\dfrac{1}{312}$，　解得：　$n=9$　。.

（以上用到了 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+4}(-1)^kC_{n+4}^k=(1-1)^{n+4}=0$，　$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+3}(-1)^kC_{n+3}^k=(1-1)^{n+3}=0$.）