2024 年尼泊尔 IMO 代表队选拔考试

2024-04-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_dea013146043457f

2024 年尼泊尔 IMO 代表队选拔考试

程国根 译

1. 设 a,b 为正整数. 求证: 若 $a^b+b^a\equiv 3 \pmod 4$, 则 $a+1$ 和 $b+1$ 中至少一个不能表示为两个完全平方数之和.

2. 任给函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. 求证: 存在正整数 x,y, 使得 $f(x+y)\le f(2x+f(y))$.

3. 求证: 存在无穷多个整数 $k\ge 2024$, 使得存在满足如下条件的集合 $\{a_1,\cdots,a_k\}$:

(1) a_1 为正整数, 且对 $1\le i<k$, 有 $a_{i+1}=a_i+1$;

(2) $2(a_1+\cdots+a_k)+a_1-a_1^2 \mid 2(a_1\cdots a_{k-2}-1)^2$.

4. Vlad 在欧氏平面上画出 100 条射线. David 画出一条直线 ℓ, ℓ 与多少条射线相交, David 就要付给 Vlad 多少元钱. 自然地, David 希望自己支付的钱越少越好. Vlad 最多能从 David 那里得到多少钱?

5. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $2BC=AB+AC$, 内心为 I. AI 和 BC 交于点 A'. AA' 的垂直平分线分别交 BI,CI 于点 B',C'. AB' 和 $\triangle ABC$ 的外接圆再次交于点 X, XI 和 AC' 交于点 X'. 求证: $2\angle XX'A'=\angle ABC$.

2024 年尼泊尔 IMO 代表队选拔考试

程国根 译

1. 设 a,b为正整数. 求证: 若 $a^b + b^a \equiv 3 \pmod{4}$, 则 $a+1$和 $b+1$中至少一个不能表示为两个完全平方数之和.

2. 任给函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. 求证: 存在正整数 x,y, 使得 $f(x+y)\le f(2x+f(y))$.

3. 求证: 存在无穷多个整数 $k\ge 2024$, 使得存在满足如下条件的集合 $\{a_{1},\cdots,a_{k}\}$:

1. a_{1}为正整数，且对 $1\le i<k$，有 $a_{i+1}=a_{i}+1$；
2. $2(a_{1}+\cdots+a_{k})+a_{1}-a_{1}^{2}\mid 2(a_{1}\cdots a_{k-2}-1)^{2}$.

4. Vlad 在欧氏平面上画出 100条射线．David 画出一条直线 ℓ，ℓ与多少条射线相交，David 就要付给 Vlad 多少元钱．自然地，David 希望自己支付的钱越少越好．Vlad 最多能从 David 那里得到多少钱?

5. 在锐角 $\triangle ABC$中，$2BC=AB+AC$，内心为 I．AI和 BC交于点 A'．AA'的垂直平分线分别交 BI,CI于点 B',C'．AB'和 $\triangle ABC$的外接圆再次交于点 X，XI和 AC'交于点 X'．求证：$2\angle XX'A'=\angle ABC$.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年尼泊尔IMO代表队选拔考试}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\ex 设$a,b$为正整数．求证：若$a^b
↪ + b^a \equiv 3 \pmod{4}$，则$a+1$和$b+1$中至少一个不能表示为两个完全平方数之和．\vfill\ex
↪ 任给函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$．求证：存在正整数$x,y$，使得$f(x+y)\le f(2x+f(y))$．\vfill\ex 求证：
↪ 存在无穷多个整数$k\ge 2024$，使得存在满足如下条件的集合$\{a_{1},\cdots,a_{k}\}$：
↪ \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item $a_{1}$为正整数，且对$1\le i<k$，有$a_{i+1}=a_{i}+1$；\item
↪ $2(a_{1}+\cdots+a_{k})+a_{1}-a_{1}^{2}\mid 2(a_{1}\cdots a_{k-2}-1)^{2}$．\end{enumerate}\vfill\ex
↪ Vlad在欧氏平面上画出$100$条射线．David画出一条直线$\ell$，$\ell$与多少条射线相交，David就要付给Vlad多少元钱．
↪ 自然地，David希望自己支付的钱越少越好．Vlad最多能从David那里得到多少钱？\vfill\ex 在锐角$\triangle ABC$中，
↪ $2BC=AB+AC$，内心为$I$．$AI$和$BC$交于点$A'$．$AA'$的垂直平分线分别交$BI,CI$于点$B',C'$．$AB'$和$\triangle
↪ ABC$的外接圆再次交于点$X$，$XI$和$AC'$交于点$X'$．求证：$2\angle XX'A'=\angle ABC$．\vfill
```