2024 年韩国数学奥林匹克（第二轮）

2024-11-10 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_debde22fba09403d

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

考试时间：2024 年 11 月 9 日

第一场：9:30-12:30 第二场：14:20-17:20

2024 年韩国数学奥林匹克（第二轮）

程国根 译

第一场

1. 相异三点 A,B,X 在圆 O 上，Ω 为 $\triangle ABO$ 的外接圆．线段 AX 和 BX 分别与 Ω 交于点 C（$\neq A$）和点 D（$\neq B$）．求证：点 O 为 $\triangle CXD$ 的垂心．

2. 若正整数数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=2$，且对任意正整数 n，$x_{n+1}-x_n\in\{0,3\}$，则称数列 $\{x_n\}$ 为“青蛙数列”．求所有满足以下结论的正实数 d：
对两个青蛙数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，若存在正整数 n，使得 $a_n=1000b_n$，则存在正整数 m，使得 $a_m=d\cdot b_m$．

3. 设 S 为平面上 2024 个点组成的集合，且其中任意三点不共线．称过 S 中任意两点的直线 ℓ 是“弱平衡的”，如果 ℓ 所分成的两个半平面（不含 ℓ）中，分别有 1010 和 1012 个 S 中的点．设 $\omega(S)$ 为“弱平衡的”直线的数量（和 S 有关），求 $\omega(S)$ 的最小值．

4. 求最小的正整数 $k\geq 2$，使得存在一个 k 次的首一整系数多项式 $f(x)$，满足：对任意整数 m,n，若 $31\mid f(m)-f(n)$，则 $31\mid m-n$．

第二场

5. 求最小的实数 M，使得对任意正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{99}$，都有

$$\sum_{k=1}^{99} \frac{a_{k+1}}{a_k + a_{k+1} + a_{k+2}} < M,$$

其中 $a_{100} = a_1$，$a_{101} = a_2$.

6. 对正整数 n，记 $g(n) = \left[\dfrac{2024}{n}\right]$，$\varphi(n)$ 为欧拉函数．求值：

$$\sum_{n=1}^{2024} \left(1 - (-1)^{g(n)}\right) \varphi(n).$$

7. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，过垂心作一条不经过顶点 A 的直线 ℓ，和直线 BC 交于点 P（异于 B, C）．过点 A 作 ℓ 的垂线和 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 R（异于 A）．设点 A, B 在 ℓ 上的射影分别为点 A', B'．过点 A' 作 BC 的垂线 ℓ_1，过点 B' 作 AC 的垂线 ℓ_2．设点 Q 与 ℓ_1 和 ℓ_2 的交点关于 ℓ 轴对称．求证：$\angle PQR = 90^\circ$.

8. 黑板上写有 10 个数字：$1, 2, \cdots, 10$．Nahyun 重复进行以下操作：选择黑板上 10 个数字中不存在整除关系的两个，擦除它们，并写上它们的最大公约数和最小公倍数．直至黑板上任意两个数字都存在整除关系，Nahyun 才停止操作．Nahyun 最多能进行多少次操作?

注：a 和 b 具有整除关系是指：$a \mid b$ 或 $b \mid a$.