2021 年泛非数学奥林匹克

2021-06-16　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_df1301c6d479478a

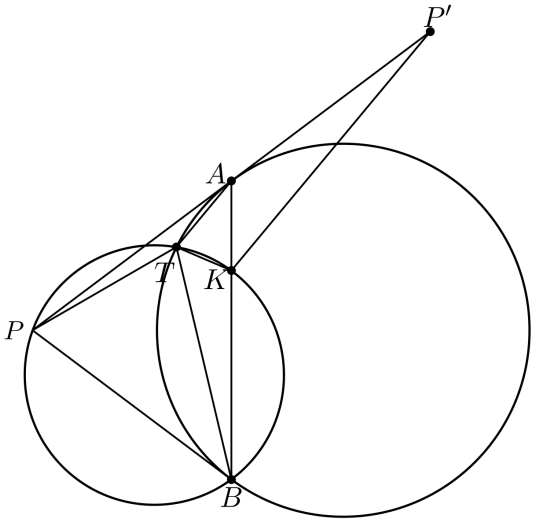
2021 年泛非数学奥林匹克——中文翻译

第一天

1. 设 n 是一个大于 3 的整数. 一个边长为 n 的正方形被平行于边的直线分为 n^2 个边长为 1 的小正方形. 求以这 n^2 个边长为 1 小正方形的顶点为顶点，边长均不超过 3，且面积为 2 的梯形个数.

   注：平行四边形也视作梯形.

2. 设 P 为圆 Γ 外一点，过 P 作 Γ 的两条切线，切点分别为 A、B，K 为直线 AB 上一点（异于 A、B），T 为 $\triangle PBK$ 的外接圆与 Γ 的另一交点，P' 为 P 关于 A 的对称点. 求证：$\angle PBT = \angle P'KA$.



3. 设正整数数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 和 $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ 满足以下条件：
   - $a_1 \geq 2$;
   - 对任意整数 $n \geq 1$，p_n 为 a_n 的最小质因子;
   - 对任意整数 $n \geq 1$，$a_{n+1} = a_n + \dfrac{a_n}{p_n}$.

   求证：存在正整数 N，对任意 $n > N$，都有 $a_{n+3} = 3a_n$.

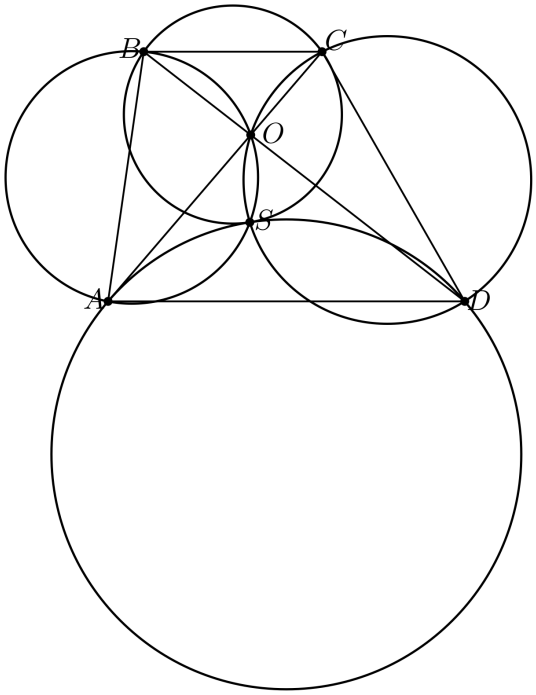
第二天

1. 求所有整数 m 和 n，使得 $\dfrac{m^2+n}{n^2-m}$ 与 $\dfrac{n^2+m}{m^2-n}$ 均为整数.

2. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $\forall x,y\in\mathbb{R}$:

$$(f(x)+y)(f(y)+x)=f(x^2)+f(y^2)+2f(xy)$$

1. 设 $ABCD$ 为梯形，且 $AD\parallel BC$. 设 $O=BD\cap AC$，$\triangle AOB$ 和 $\triangle DOC$ 的外接圆的另一个交点为 S，求证 $\triangle ASD$ 和 $\triangle BSC$ 的外接圆相切.



往期文章推荐