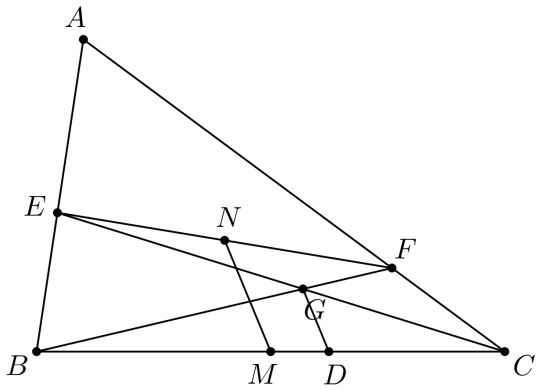
用向量法证明近期两道平面几何二试模拟题

2025-06-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_df328acd4ec2476e

题目 1：

在 $\triangle ABC$ 中，点 D,E,F 分别在 BC,CA,AB 上，满足 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AC}{AB}$，且 $BE=CF$，E,F 在 BC 的同侧．M 为线段 BC 的中点，N 为线段 EF 的中点，G 为 BF 与 CE 的交点．求证：$MN\parallel DG$.



证明：

设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c，面积为 S，$BE=CF=t$．则

$$\begin{aligned}\frac{GB}{BF}&=\frac{[BCE]}{[BCE]+[CFE]}\\&=\frac{\frac{t}{c}\cdot S}{\frac{t}{c}\cdot S+\frac{t}{b}\cdot\frac{c-t}{c}\cdot S}\\&=\frac{b}{b+c-t}\end{aligned}$$

同理 $\dfrac{GC}{CE}=\dfrac{c}{b+c-t}$.

由 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}$ 知：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GD}=&\frac{CD}{BC}\cdot\overrightarrow{GB}+\frac{BD}{DC}\cdot\overrightarrow{GC}\\=&\frac{c}{b+c}\cdot\frac{GB}{BF}\cdot\overrightarrow{FB}+\frac{b}{b+c}\cdot\frac{GC}{CE}\cdot\overrightarrow{EC}\\=&\frac{bc}{(b+c)(b+c-t)}(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EC})\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{EC}\\=&(\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB})+(\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC})\\=&2\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

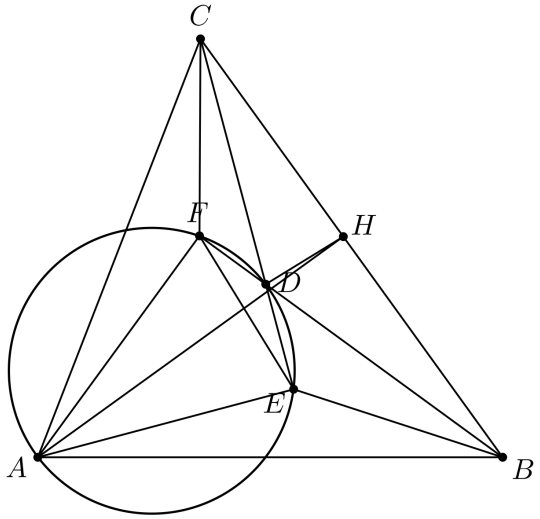
故 $GD\parallel MN$，证毕.

注：

可以得到 GD, MN 均平行于 $\angle BAC$ 的内角平分线.

题目 2:

如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, A 在 BC 上的投影为 H. $\triangle ABC$ 内两点 F, E 满足 $\angle ABF=\angle CBE=\angle BCF=\angle ACE$. 设 BF, CE 交于点 D，已知 A, E, D, F 四点共圆，求证：$DH\perp EF$.



解答（PDF 中已展开）

证明：

E, F 为 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点，故 $\angle BAF=\angle CAE$，又 $\angle ABF=\angle ACE$，从 $\angle ABF=\angle ACE$，结合 A, E, D, F 四点共圆知：

$\angle AED = \angle AFD = 90^\circ = \angle AHB = \angle AHC$

于是 A, B, H, F； A, C, H, E 分别共圆，有

$\angle AHF = \angle ABF = \angle ACE = \angle AHE$，于是 $\triangle BHE \sim \triangle CHF$.

$$
\begin{aligned}
& DH \perp EF \\
\Longleftrightarrow\ & \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\frac{CH}{BC} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{BH}{BC} \cdot \overrightarrow{DC}\right) \cdot (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AF}) = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & CH \cdot \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AE} = BH \cdot \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AF} \\
\Longleftrightarrow\ & CH \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{AE} = BH \cdot (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{AF} \\
\Longleftrightarrow\ & CH \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AE} = BH \cdot \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AF} \\
\Longleftrightarrow\ & CH \cdot BC \cdot AE \cdot \sin\angle EAH = BH \cdot BC \cdot AF \cdot \sin\angle FAH \\
\Longleftrightarrow\ & CH \cdot EH \cdot \sin\angle AHE = BH \cdot FH \cdot \sin\angle AHF
\end{aligned}
$$

由 $\triangle BHE \sim \triangle CHF$ 即证.