今年为什么“十五的月亮十七圆”

2026-09-26　原文链接

2026 年中秋｜时间均为北京时间（UTC+8），月相时刻取到分钟.

今年中秋是 9 月 25 日，八月十五．满月却在 9 月 27 日 0 时 49 分，已经是八月十七.

满月只比 26 日结束的午夜晚了 49 分钟．若再早 49 分钟，它就退回 26 日，成了“十六圆”；早 49 分钟整，它落在 27 日 0 时 00 分，仍算十七．今年就压在十七这一边.

先看农历的日子是怎么数的.

0.1　十七是数出来的

新月称朔，满月称望．农历以朔落在的那一天为初一，初一自零时起算.

设朔发生在初一上午 11 时 27 分．这一日已经过了 11 小时余，而月龄仍自零起算：月龄指从朔起经过的时间，与钟点无关.

以初一零时为原点，时间以天为单位．记朔在初一零时之后 u 天，自朔至望又经过 Δ 天．朔必落在初一之内，故

$$0 \le u < 1$$

到望时，初一零时之后已过 $u+\Delta$ 天．日序自初一计起，满月所在的日序 n 为

$$n = 1 + \lfloor u + \Delta \rfloor \tag{1}$$

$\lfloor x \rfloor$ 是向下取整，只计完整经过的天数．加 1 是因为过零整天仍是初一，过满一整天才是初二.

把 (1) 反过来写：满月落在第 k 天，等价于

$$k - 1 - \Delta \le u < k - \Delta \tag{2}$$

Δ 定时，日序只由 u 落在哪个长度为 1 的区间决定.

十七圆的充要条件是 $16 \le u + \Delta < 17$，即

$$u \ge 16 - \Delta \tag{3}$$

注意到上界 $u < 17 - \Delta$ 恒成立：由 $u < 1$ 且 $\Delta < 16$ 即得．于是要问十七圆，只要问初一这一天的朔够不够晚，(3) 就是这个条件.

0.2 除以 2 得不出十七

先考虑最简单的情形：日月之间的相对角度匀速变化．朔望月平均 29.5306 天，半个周期即

$$\Delta_0 = \frac{29.5306}{2} = 14.7653 \tag{4}$$

即 14 天 18 小时 22 分．代入 $0 \le u < 1$，无论朔在初一几点，总有

$$14.7653 \le u + \Delta_0 < 15.7653$$

取整加 1，故 $n \in \{15, 16\}$．匀速的假设允许十五圆和十六圆，给不出十七．

但它足以解释那句俗语．设朔发生的时刻在一天之内均匀分布，由 (2) 反解得

日序 n	u 的范围	占比
15	$0 \le u < 0.235$	23.5%
16	$0.235 \le u < 1$	76.5%

十六只要 $u \ge 15 - \Delta_0 \approx 0.235$，占去全天的七成半．十六比十五多，这就是 “十五的月亮十六圆” 的来处．

一般地，由 (2)(3) 得

$$P(n = 17) = \max(0,\ \Delta - 15) \tag{5}$$

因 $u < 1$，$\Delta \le 15$ 时十七圆的概率为零：Δ 不越过 15 天，十七圆无从谈起．实际的朔到望间隔在 13.90 天与 15.61 天之间浮动，15 天落在其中偏上的位置，故十七圆少见．2001 至 2100 年的 100 次中秋月中，十六圆 48 次，十五圆 38 次，十七圆 14 次，十四圆 0 次．

常见的说法是 “29.53 不是整数，所以凑不出十七”，这并不成立．取整只决定日序取 15 还是 16，而这两个值本来都能取到．会变的是 Δ：(4) 把 Δ 钉死在 14.7653，Δ 一变，(2) 的区间整体平移，(5) 才有正值．

0.3 月亮走得不匀

朔、望由日月的地心视黄经差定义：两者相同为朔，相差 180° 为望．记月球与太阳的地心视黄经为 $\lambda_M(t)$ 与 $\lambda_S(t)$，其差

$$\theta(t) = \lambda_M(t) - \lambda_S(t) \tag{6}$$

即月相角．角度连续展开，越过 360° 不归零．取朔在 t_0、望在 t_1，令 $\theta(t_0) = 0$，则望的定义为

$$\theta(t_1) - \theta(t_0) = \pi \tag{7}$$

相对角速度

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\lambda_M}{dt} - \frac{d\lambda_S}{dt} \tag{8}$$

自朔至望，各段时间转过的角度之和恰为半圈：

$$\int_{t_0}^{t_1} \omega(t)\, dt = \pi \tag{9}$$

两端除以用时，得这一段的平均相对角速度 $\bar{\omega} = \pi/\Delta$，即

$$\Delta = \frac{\pi}{\bar{\omega}} \tag{10}$$

半圈的角度 π 固定，故 Δ 只由这一段的平均相对角速度决定：$\bar{\omega}$ 变小，Δ 变长．ω 为常数时，可以用半圈除以角速度；ω 变化时，角度走了一半，时间未必走了一半．(4) 之所以不成立，原因就在这里．

不均匀的一部分来自椭圆轨道．我们先把地月运动简化为二体问题，开普勒第二定律给出地月连线在相等时间扫过相等面积．记地月距离为 r，月球在轨道平面内、自近地点方向量起的角度为 ν，则

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = h, \qquad \frac{d\nu}{dt} = \frac{h}{r^2} \tag{11}$$

h 是常数．距离在分母且取平方：近则快，远则慢．记半长轴 a、偏心率 e，近地点与远地点距离分别为 $a(1-e)$ 与 $a(1+e)$．由 (11) 两式相除，距离消去：

$$\frac{\dot{\nu}_{\text{近}}}{\dot{\nu}_{\text{远}}} = \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^2 \tag{12}$$

取月球轨道 $e \approx 0.0549$，得 1.246，近地点比远地点快约 25%．e 增至 0.1 时该值为 1.494．

要注意 $\dot{\nu}$ 是轨道角速度，不是 (8) 的相对角速度 ω，两者还差太阳方向的变化这一项；真实轨道也不是一条固定不变的椭圆．(11)(12) 只回答快慢从哪来．

0.4 今年慢了 19 小时

历表给出的这一轮是：朔在 9 月 11 日 11 时 27 分，望在 9 月 27 日 0 时 49 分．以分钟计，

$$\Delta = 15 \times 1440 + 13 \times 60 + 22 = 22402$$

即 15 天 13 小时 22 分，也就是 15.556944 天．与 (4) 相比

$$\Delta - \Delta_0 = 0.791644 \text{ 天} = 19.00 \text{ 小时}$$

比半个平均朔望月多了 19 小时. 由 (10),

$$\bar{\omega} = \frac{180^\circ}{15.556944} = 11.5704$$

单位为度每天. 平均周期模型给出 $\omega_0 = 360^\circ/29.5306 = 12.1907$，单位相同，前者低 5.09%. 两个平均角速度之比就是两段时间之比的反比:

$$\frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \frac{\Delta_0}{\Delta} = \frac{14.7653}{15.5569} = 0.9491$$

历表还给出下一次朔在 10 月 10 日 23 时 50 分. 这一轮月相被望切成两段:

分段	用时	平均角速度
朔 → 望	22402 分 = 15 天 13 时 22 分	11.5704°/天
望 → 下一次朔	20101 分 = 13 天 23 时 1 分	12.8949°/天

两段的黄经差同为 180°，用时差 38 小时 21 分，平均角速度差 11.4%. 两段相加

$$22402 + 20101 = 42503 \text{ 分} = 29 \text{ 天 } 12 \text{ 时 } 23 \text{ 分}$$

这一轮朔望月为 29.515972 天，比 29.5306 天短 21 分钟. 整轮偏短，前半段却比一半长近 19 小时. 所以即便把这一轮的朔望月量得很准，也不能除以 2 去求满月时刻: 前半段和后段本来就差 38 小时.

0.5 越过午夜的那 49 分钟

9 月 11 日为八月初一，朔在当日 11 时 27 分，故

$$u = \frac{11 \times 60 + 27}{1440} = \frac{687}{1440} = 0.477083$$

自初一零时至望

$$u + \Delta = \frac{687 + 22402}{1440} = \frac{23089}{1440} = 16 + \frac{49}{1440}$$

$23089 = 16 \times 1440 + 49$. 代入 (1)

$$n = 1 + \left\lfloor 16 + \frac{49}{1440} \right\rfloor = 1 + 16 = 17$$

余量即 49 分钟. 由 (3)，今年要够到十七，u 至少为

$$16 - \Delta = 0.443056 = 10 \text{ 时 } 38 \text{ 分}$$

实际 u 为 11 时 27 分，多出的就是那 49 分钟. 等价地，$\Delta_{\text{临界}} = 16 - u = 15$ 天 12 时 33 分，实际为 15 天 13 小时 22 分.

注意到 27 日 0 时 00 分仍属十七. 望早到 49 分钟以上，就退回二十六日，成为十六圆；早 49 分钟整时，望在 27 日 0 时 00 分，仍是十七. 今年多出的这 49 分钟，刚好把它留在十七这一边.

0.6 三晚都看着圆

事实上，望只是一个时刻，月亮却能连着几晚看着圆. 我们不妨把月球近似为球体，并忽略月食. 设 α 为日—月—地夹角，顶点在月球. 平行光照明、远距离观察时，视圆盘被照亮的面积比例为

$$f = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \tag{13}$$

由面积相加可得. 视圆盘半径 R，面积 πR^2；明暗界线是大圆，投影为以 R 与 $R\cos\alpha$ 为半轴的半椭圆；受照面积为半圆加此半椭圆，故

$$f = \frac{\frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi R^2\cos\alpha}{\pi R^2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$\alpha = 90^\circ$ 时 $f = 1/2$，即上弦月.

α 很小时，用弧度展开 $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{24} - \cdots$，得

$$1 - f = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^4}{48} + O(\alpha^6) \tag{14}$$

无一次项：α 减半，缺掉的面积约为四分之一. $\alpha = 10^\circ$ 时首项给出 0.7615%，加次项为 0.7596%，与 (13) 的 99.2404% 相符.

望附近有 $\alpha \approx \bar{\omega}(t_1 - t)$，代入 (14) 的平方项

$$1 - f \approx \frac{\bar{\omega}^2}{4}(t_1 - t)^2 \tag{15}$$

取 $\bar{\omega} = 0.21277$ 弧度每天，系数为 0.01132. 偏离望 1 天，月面缺约 1.1%；偏离 2 天，缺约 4.5%. 缺到 1% 需 $\alpha \approx 0.2$ 弧度，约 11.5°，相当于偏离望 0.94 天.

以 21 时计

夜晚	偏离望	f
八月十五	27.8 小时	98.5%
八月十六	3.8 小时	99.97%
八月十七	20.2 小时	99.2%

三夜相差不到 1.5 个百分点，肉眼难分. 十六夜离望最近，故最圆；十五夜已过 98%，细看或不觉得圆满；十七夜离望已十几小时，反而略逊于十六.

所以今年赏月，二十六日天黑后就可以出门，不必守到 27 日 0 时 49 分.

说明：本文以日月地心视黄经差 180° 定义“望”. (1)–(5) 是取整与计时，(6)–(12) 是角度与角速度，(13)–(15) 是照明几何，分别用来确定农历日序、解释朔望间隔的长短、估算月面外观，均不代替精密天文历表. 文中时刻按世界时换算为北京时间，已与两份独立历表核对；朔望间隔的浮动区间与百年中秋月圆统计取自公开天文资料. (14) 略去 α^6 及其后各项，(15) 另用了望附近的线性近似，故表中 f 是估算值，不是实测亮度.