数学竞赛每日一练第 1 期解答

2021-06-04 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_dfaf7410ff54dd25

题目 1（2021 土耳其 TST）求所有的正整数 n，使得存在一组实数 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 满足，对任意 $i=1,2,\cdots,n$，均有 $i\le x_i\le 2i$，且

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)^2}=\frac{27}{4n(n+1)(2n+1)}$$

解答（PDF 中已展开）

解答满足题意的 n 为所有模 9 余 $0,4,8$ 的正整数.

首先证明:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)^2}\le\frac{27}{4n(n+1)(2n+1)}$$

我们知道:

$$\begin{aligned}&1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ \Rightarrow&\frac{27}{4n(n+1)(2n+1)}=\frac{9}{8(1^2+2^2+\cdots+n^2)}\end{aligned}$$

故只需证明:

$$\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)^2}\le\frac{9}{8(1^2+2^2+\cdots+n^2)}$$

即

$$\begin{aligned}&8(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\ \le&9(x_1+2x_2+\cdots+nx_n)^2\\ =&(3x_1+6x_2+\cdots+3nx_n)^2\end{aligned}$$

由于对任意 $i=1,2,\cdots,n$，均有 $i\le x_i\le 2i$. 于是 $(x_i-i)(2i-x_i)\ge 0$，即 $3ix_i\ge x_i^2+2i^2$.

因此

$$\begin{aligned}&(3x_1+6x_2+\cdots+3nx_n)^2\\ \ge&(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+2(1^2+2^2+\cdots+n^2))^2\end{aligned}$$

设 $A=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，$B=1^2+2^2+\cdots+n^2$. 则要证明

$$8AB \le (A+2B)^2 \iff (A-2B)^2 \ge 0$$

这显然成立，于是不等式成立.

回到原题，要使得等式成立，考虑取等条件，我们有：

对于任意 $i \in \{1,2,\cdots,n\}$，都有 $x_i = i$ 或 $x_i = 2i$ 且

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 2(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

设满足 $x_i = 2i$ 的所有项的下标依次为 i_1，i_2，$\cdots$，i_k. 则上式变为：

$$3(i_1^2 + i_2^2 + \cdots + i_k^2) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

即

$$i_1^2 + i_2^2 + \cdots + i_k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{18}$$

于是 $18 | n(n+1)(2n+1)$，由此可得 n 模 9 余 0，4，8. 下面给出构造：

$n = 0$ 是平凡的；

$3(1^2 + 3^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$；

$3(2^2 + 8^2) = 1^2 + 2^2 + \cdots + 8^2$；

$3(1^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2) = 1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2$；

$3(2^2 + 10^2 + 13^2) = 1^2 + 2^2 + \cdots + 13^2$；

$3(1^2 + 7^2 + 16^2 + 17^2) = 1^2 + 2^2 + \cdots + 17^2$.

进行跨度为 18 的归纳，假设对 n 结论成立，那么在 $n+18$ 时，只需在 $n+1$，$n+2$，$\cdots$，$n+18$ 中找出若干个不同的数 $n+i_1$，$n+i_2$，$\cdots$，$n+i_k$，满足

$$\begin{aligned} &3((n+i_1)^2 + (n+i_2)^2 + \cdots + (n+i_k)^2) \\ =&(n+1)^2 + (n+2)^2 + \cdots + (n+18)^2 \end{aligned}$$

对比 n^2 系数可得 $k = 6$，于是 $i_1 + i_2 + \cdots + i_6 = 57$，$i_1^2 + i_2^2 + \cdots + i_6^2 = 703$. 因此

$$\sum_{k=1}^{6} (i_k - 9)(i_k - 10) = 703 - 19 \times 57 + 6 \times 90 = 160$$

这些 $(i_k - 9)(i_k - 10)$ 能取的值为 0，2，6，12，20，30，42，56，72. 可以发现 $2 + 6 + 72 = 80$，于是取这 6 个 i_k 为 1，7，8，11，12，18 即可.

因此本题答案为所有模 9 余 $0, 4, 8$ 的正整数.

题目 2 （**2018 年巴尔干地区预选题**）设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为正实数. 证明：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \frac{12}{n(n+1)(n+2)(3n+1)}\left(\sum_{i=1}^{n} i x_i\right)^2$$

解答（PDF 中已展开）

证明注意到

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

令 $c = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$，记 $y_i = x_i - c$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则注意到

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - nc = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n} x_i = c$$

代入可得原式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i + c)^2 \geq c\sum_{i=1}^{n}(y_i + c) + \frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} i(y_i + c)\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^2}$$

化简可得上式等价于

$$\left(c^2 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)\left[\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2\right] \geq \left(c\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} i y_i\right)^2$$

由柯西不等式即证.