解一道单增老师征解题

2024-11-30　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e14463a88ed296e0

题目：

已知 a,c,m,n 均为正数，且

$$\begin{cases}2c^2+mc-3an-m^2-n^2=0\\ nc^2-amc-am^2-an^2=0\end{cases}$$

求 $\dfrac{cn}{am}$ 的值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

由齐次性不妨设 $\dfrac{nc}{a}=1$，则

$$\begin{cases}m^2+n^2-mc=2c^2-3an=2c^2-3n^2c\\ m^2+n^2+mc=\dfrac{nc^2}{a}=c\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}(3c+1)n^2=2c^2+mc-m^2\\ n^2=-m^2-mc+c\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}&(3c+1)(-m^2-mc+c)=2c^2+mc-m^2\\ \Longleftrightarrow\ &3c\cdot m^2+(3c^2+2c)m-(c^2+c)=0\\ \Longleftrightarrow\ &c(3m-1)(m+c+1)=0\end{aligned}$$

由 $c,m>0$ 知 $m=\dfrac{1}{3}$，于是 $\dfrac{cn}{am}=\dfrac{1}{m}=3.$