Mathematical Reflections 2024 年第一期征解题

2024-01-28 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e17c9390c42a55b5

1

Mathematical Reflections 2024 年第一期征解题

Junior Problems

程国根 译

J649. 求所有正整数 n，使得 $(n+3)(n^2+3n+3)$ 为三个素数 $p>q>r$ 之积，且 $p-r=6$.

J650. 实数 a,b,c 满足 $a^2+b^2+c^2=1$. 求证:

$$\sqrt{1-bc}+\sqrt{1-ca}+\sqrt{1-ab}\geq\sqrt{6}.$$

J651. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，已知

$$(AB-BC+CD+DA)(BC+CD+DA-AB)+AC\cdot BD=(AB+AD)(BC+CD).$$

求 $\angle ADC$ 的大小.

J652. 在四边形 $ABCD$ 中，X 为对角线的交点. 设 r_1,r_2,r_3,r_4 分别为 $\triangle XAD,\triangle XDC,\triangle XCB,\triangle XBA$ 的内切圆半径. 求证：若

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4},$$

则四边形 $ABCD$ 有内切圆.

J653. 设 a,b,c 为互异的实数. 求证：下列三个等式中，已知任意两个都能推出第三个:

$$3ab+(b-c)(c-a)=\frac{16}{a-b},3bc+(c-a)(a-b)=\frac{4}{b-c},3ca+(a-b)(b-c)=\frac{-20}{c-a}.$$

是否存在这样的 (a,b,c)?

J654. 是否存在函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意 $x\in\mathbb{Z}$，都有

$$f(f(x))=x^3-2x+1?$$

Mathematical Reflections 2024 年第一期征解题

Senior Problems

程国根　译

S649. 正实数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca+abc=4$．求证：

$$\frac{\sqrt{a}}{a+2}+\frac{\sqrt{b}}{b+2}+\frac{\sqrt{c}}{c+2}\leq 1.$$

S650. 在 $\triangle ABC$ 中，设 A',B',C' 分别为旁切圆与三条边的切点．

(1) 向量 $\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'}$ 能围成一个三角形当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形．

(2) 将上一问中的向量改成线段，结论是否仍成立?

S651. 设 a,b,c 为实数，求证：

$$3a^2b^2c^2+3\sum_{cyc}(a^4b^2+a^2b^4)\geq 3abc\sum_{cyc}a^3+4\sum_{cyc}a^3b^3.$$

S652. 求最小的正整数 m，使得存在正整数 n，满足

$$1+2+\cdots+m=(2+3+\cdots+n)^2.$$

S653. 非负实数 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_9=2$，且 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_9$．求证：

$$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_1\leq 1.$$

S654. 正实数 a,b,c 满足 $a+b+c=3$．求证：

$$\frac{8(ab+bc+ca)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 9\sqrt{abc}.$$

Mathematical Reflections 2024 年第一期征解题

Undergraduate Problems

程国根　译

U649. 计算：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(1^2+n^2)(2^2+n^2)\cdots(n^2+n^2)}{n!n^n}\right)^{1/n}.$$

U650. 计算：

$$I=\int_1^e\frac{(\ln x-1)^2-3}{(\ln x+2)^2}\mathrm{d}x.$$

U651. 实数 x,y,z,t 满足 $x+y+z+t=0$．求证：

$$\frac{x+1}{x^2+3}+\frac{y+1}{y^2+3}+\frac{z+1}{z^2+3}+\frac{t+1}{t^2+3}\le\frac{4}{3}.$$

U652. 设 k 为正整数，n 为正偶数．求证：多项式

$$1+x+\cdots+x^{2^k}+x^n$$

有一个复根的模长为 1，当且仅当 $v_2(n)<k$．

U653. 求所有的有限群，其有真子群，且真子群的阶只能为 2 或 3．

U654. 计算：

$$\int_0^1\frac{x\sqrt{x}\ln x}{x^2-x+1}\mathrm{d}x.$$

Mathematical Reflections 2024 年第一期征解题

Olympiad Problems

程国根　译

O649. 求所有正整数 n，使得

$$n!+1=(8a-3)^2;(n+1)!+1=(8b+3)^2;(2n-1)!+1=(8c-1)^2,$$

其中 a,b,c 均为模 8 余 1 的正整数.

O650. 求最大的实数 λ，使得不等式

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}+\lambda\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}-\frac{1}{3}\right)$$

恒成立，其中 a,b,c 为非负实数，且至多一个为 0.

O651. 求最大的实数 k，使得不等式

$$\frac{a^3+ka^2b}{a+b}+\frac{b^3+kb^2c}{b+c}+\frac{c^3+kc^2a}{c+a}\geq\frac{(k+1)(ab+bc+ca)}{2}$$

恒成立，其中 a,b,c 为非负实数，且至多一个为 0.

O652. 对正整数 n，记 $S_2(n)$ 为 n 在二进制表示下的数码和. 求证：存在正整数 $l,m\geq1402$，使得存在无穷多对奇数 (a,b)，满足 $S_2(a)=l$，$S_2(b)=m$，且 $S_2(ab)=4$.

O653. 设 $n\geq4$，实数 $a_1=a_2\geq a_3\geq\cdots\geq a_{n-1}=a_n$. 求证：

$$n(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)\geq(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2.$$

O654. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，且最高次项系数为正. 求证：数列

$$x_n=\left\{\frac{6^{f(n)}}{n}\right\}$$

在 $[0,1]$ 中稠密. ($\{a\}$ 表示 a 的小数部分.)

原文:

Junior Problems

J649. Find all integers n for which

$$(n+3)\left(n^2+3n+3\right)$$

is the product of three primes $p>q>r$ such that $p-r=6$.

Proposed by Adrian Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

J650. Let a,b,c be real numbers such that $a^2+b^2+c^2=1$. Prove that

$$\sqrt{1-bc}+\sqrt{1-ca}+\sqrt{1-ab}\geq\sqrt{6}.$$

Proposed by Nguyen Viet Hung, Hanoi University of Science, Vietnam

J651. Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral such that

$$(AB-BC+CD+DA)(BC+CD+DA-AB)+AC\cdot BD=(AB+AD)(BC+CD).$$

Find $\angle ADC$.

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

J652. Let $ABCD$ be a trapezoid and let X be the intersection of its diagonals. Let r_1,r_2,r_3,r_4 be the inradii of triangles XAD,XDC,XCB,XAB, respectively. Prove that if

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$$

then $ABCD$ is circumscribed about a circle

Proposed by Mihaela Berindeanu, Bucharest, România

J653. Let a,b,c be distinct real numbers. Prove that any two of the equalities

$$3ab+(b-c)(c-a)=\frac{16}{a-b},\quad 3bc+(c-a)(a-b)=\frac{4}{b-c},\quad 3ca+(a-b)(b-c)=\frac{-20}{c-a},$$

imply the third. Are there such numbers?

Proposed by Adrian Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

J654. Is there a function $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ such that $f(f(x))=x^3-2x+1$ for all $x\in\mathbb{Z}$?

Proposed by Mircea Becheanu, Canada

Senior Problems

S649. Let a, b, c be positive real numbers such that $ab + bc + ca + abc = 4$. Prove that

$$\frac{\sqrt{a}}{a+2} + \frac{\sqrt{b}}{b+2} + \frac{\sqrt{c}}{c+2} \leq 1.$$

Proposed by Nguyen Viet Hung, Hanoi University of Science, Vietnam

S650. For a triangle ABC let A', B', C' be the tangency points of the ex-circles with sides $[BC], [CA], [AB]$, respectively.

(i) Prove that one can construct a triangle with the vectors $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ if and only if triangle ABC is equilateral.

(ii) Does the above property remain true if segments $[AA'], [BB'], [CC']$ are used for the construction?

Proposed by Dorin Andrica, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, România

S651. Let a, b, c be real numbers. Prove that

$$3a^2b^2c^2 + 3\sum_{cyc}\left(a^4b^2 + a^2b^4\right) \geq 3abc\sum_{cyc}a^3 + 4\sum_{cyc}a^3b^3.$$

Proposed by Paolo Perfetti, Universita degli studi di Tor Vergata Roma, Italy

S652. Find the least positive integer m for which there is a positive integer n such that

$$1 + 2 + \cdots + m = (2 + 3 + \cdots + n)^2$$

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

S653. Let $a_1, a_2, \ldots, a_9$ be nonnegative real numbers such that $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 2$ and $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_9$. Prove that

$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_9a_1 \leq 1.$$

Proposed by Vasile Cârtoaje, Oil-Gas University, Ploieşti, România

S654. Let a, b, c be positive real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$\frac{8(ab + bc + ca)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 9\sqrt{abc}.$$

Proposed by Marius Stănean, Zalău, România

Undergraduate Problems

U649. Evaluate

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1^2+n^2\right)\left(2^2+n^2\right)\cdots\left(n^2+n^2\right)}{n!n^n}\right)^{1/n}$$

Proposed by Mircea Becheanu, Canada

U650. Evaluate

$$I=\int_1^e\frac{(\ln x-1)^2-3}{(\ln x+2)^2}dx.$$

Proposed by Mihaela Berindeanu, Bucharest, România

U651. Let x,y,z,t be real numbers such that $x+y+z+t=0$. Prove that

$$\frac{x+1}{x^2+3}+\frac{y+1}{y^2+3}+\frac{z+1}{z^2+3}+\frac{t+1}{t^2+3}\le\frac{4}{3}.$$

Proposed by Marius Stănean, Zalău, România

U652. Let k,n be positive integers and n even. Prove that the polynomial

$$1+x+\cdots+x^{2^k}+x^n$$

has a root on the unit circle if and only if $\nu_2(n)<k$.

Proposed by Navid Safaei, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

U653. Find all finite groups which have proper subgroups and these have order 2 or 3 only.

Proposed by Mihai Piticari, Câmpulung Moldovenesc, România

U654. Evaluate

$$\int_0^1\frac{x\sqrt{x}\ln x}{x^2-x+1}\,dx$$

Proposed by Vasile Mircea Popa, Sibiu, România

Olympiad Problems

O649. Find all positive integers n such that

$$n!+1=(8a-3)^2;\ (n+1)!+1=(8b+3)^2;\ (2n-1)!+1=(8c-1)^2,$$

for some positive integers a,b,c congruent to 1 (mod 8).

Proposed by Titu Andreescu, University of Texas at Dallas, USA

O650. Find the greatest constant λ such that the inequality

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}+\lambda\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}-\frac{1}{3}\right)$$

holds for all nonnegative real numers a,b,c, no two of which are zero.

Proposed by Nguyen Viet Hung, Hanoi University of Science, Vietnam

O651. Find the greatest real number k such that for all nonnegative real numbers a, b, c, no two of wich are zero,

$$\frac{a^3+ka^2b}{a+b}+\frac{b^3+kb^2c}{b+c}+\frac{c^3+kc^2a}{c+a}\geq\frac{(k+1)(ab+bc+ca)}{2}.$$

Proposed by Titu Andreescu, Dallas, USA and Marius Stănean, Zalău, România

O652. For a positive integer n we denote by $S_2(n)$ the sum of digits of n in base 2. Prove that there are integers $l,m\geq 1402$ for which there are infinitely many pairs of odd integers (a,b) with $S_2(a)=l$, $S_2(b)=m$ and $S_2(ab)=4$.

Proposed by Navid Safaei, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

O653. Let $a_1=a_2\geq a_3\geq\cdots\geq a_{n-1}=a_n$ be real numbers where $n\geq 4$. Prove that

$$n(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)\geq(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2.$$

Proposed by Vasile Cârtoaje, Oil-Gas University, Ploieşti, România

O654. Let $f(x)$ be a polynomial with integer coefficients whose leading coefficient is positive. Prove that the sequence

$$x_n=\left\{\frac{6^{f(n)}}{n}\right\}$$

is dense in $[0,1]$. (By $\{a\}$ we mean the fractional part of a.)

Proposed by Navid Safaei, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Mathematical Reflections 2024 年第一期征解题

Junior Problems

程国根　译

J649. 求所有正整数 n，使得 $(n+3)(n^{2}+3n+3)$为三个素数 $p>q>r$之积，且 $p-r=6$.

J650. 实数 a,b,c满足 $a^{2}+b^{2}+c^{2}=1$. 求证：$$\sqrt{1-bc}+\sqrt{1-ca}+\sqrt{1-ab}\ge\sqrt{6}.$$

J651. 在圆内接四边形 $ABCD$中，已知 $$(AB-BC+CD+DA)(BC+CD+DA-AB)+AC\cdot BD=(AB+AD)(BC+CD).$$求 $\angle ADC$的大小.

J652. 在四边形 $ABCD$中，X为对角线的交点. 设 r_{1},r_{2},r_{3},r_{4}分别为 $\triangle XAD,\triangle XDC,\triangle XCB,\triangle XBA$的内切圆半径. 求证：若 $$\dfrac{1}{r_{1}}+\dfrac{1}{r_{3}}=\dfrac{1}{r_{2}}+\dfrac{1}{r_{4}},$$则四边形 $ABCD$有内切圆.

J653. 设 a,b,c为互异的实数. 求证：下列三个等式中，已知任意两个都能推出第三个：$$3ab+(b-c)(c-a)=\frac{16}{a-b},3bc+(c-a)(a-b)=\frac{4}{b-c},3ca+(a-b)(b-c)=\frac{-20}{c-a}.$$是

否存在这样的 (a,b,c)?

J654. 是否存在函数 f：$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意 $x\in\mathbb{Z}$，都有 $$f(f(x))=x^{3}-2x+1?$$

Mathematical Reflections 2024 年第一期征解题

Senior Problems

程国根　译

S649. 正实数 a,b,c满足 $ab+bc+ca+abc=4$. 求证：$$\frac{\sqrt{a}}{a+2}+\frac{\sqrt{b}}{b+2}+\frac{\sqrt{c}}{c+2}\le 1.$$

S650. 在 $\triangle ABC$中，设 A',B',C'分别为旁切圆与三条边的切点.

1. 向量 $\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'}$能围成一个三角形当且仅当 $\triangle ABC$为正三角形.
2. 将上一问中的向量改成线段，结论是否仍成立?

S651. 设 a,b,c为实数，求证：$$3a^{2}b^{2}c^{2}+3\sum_{cyc}(a^{4}b^{2}+a^{2}b^{4})\ge 3abc\sum_{cyc}a^{3}+4\sum_{cyc}a^{3}b^{3}.$$

S652. 求最小的正整数 m，使得存在正整数 n，满足 $$1+2+\cdots+m=(2+3+\cdots+n)^{2}.$$

S653. 非负实数 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{9}$满足 $a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{9}=2$，且 $a_{1}\ge a_{2}\ge\cdots\ge a_{9}$. 求证：$$a_{1}a_{2}+a_{2}a_{3}+\cdots+a_{9}a_{1}\le 1.$$

S654. 正实数 a,b,c满足 $a+b+c=3$.求证：$$\frac{8(ab+bc+ca)^{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 9\sqrt{abc}.$$

Mathematical Reflections 2024 年第一期征解题

Undergraduate Problems

程国根　译

U649. 计算：$$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(1^{2}+n^{2})(2^{2}+n^{2})\cdots(n^{2}+n^{2})}{n!n^{n}}\right)^{1/n}.$$

U650. 计算：$$I=\int_{1}^{e}\frac{(\ln x-1)^{2}-3}{(\ln x+2)^{2}}\mathrm{d}x.$$

U651. 实数 x,y,z,t满足 $x+y+z+t=0$. 求证：$$\frac{x+1}{x^{2}+3}+\frac{y+1}{y^{2}+3}+\frac{z+1}{z^{2}+3}+\frac{t+1}{t^{2}+3}\le\frac{4}{3}.$$

U652. 设 k为正整数，n为正偶数. 求证：多项式 $$1+x+\cdots+x^{2^{k}}+x^{n}$$ 有一个复根的模长为 1，当且仅当 $v_{2}(n)<k$.

U653. 求所有的有限群，其有真子群，且真子群的阶只能为 2或 3.

U654. 计算：$$\int_{0}^{1}\frac{x\sqrt{x}\ln x}{x^{2}-x+1}\mathrm{d}x.$$

Mathematical Reflections 2024 年第一期征解题

Olympiad Problems

程国根　译

O649. 求所有正整数 n，使得 $$n!+1=(8a-3)^{2};(n+1)!+1=(8b+3)^{2};(2n-1)!+1=(8c-1)^{2},$$ 其中 a,b,c均为模 8余 1的正整数.

O650. 求最大的实数 λ，使得不等式 $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}+\lambda\left(\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{(a+b+c)^{2}}-\frac{1}{3}\right)$$ 恒成立，其中 a,b,c为非负实数，且至多一个为 0.

O651. 求最大的实数 k，使得不等式 $$\frac{a^{3}+ka^{2}b}{a+b}+\frac{b^{3}+kb^{2}c}{b+c}+\frac{c^{3}+kc^{2}a}{c+a}\ge\frac{(k+1)(ab+bc+ca)}{2}$$ 恒成立，其中 a,b,c为非负实数，且至多一个为 0.

O652. 对正整数 n, 记 $S_{2}(n)$为 n在二进制表示下的数码和. 求证: 存在正整数 $l,m\ge 1402$，使得存在无穷多对奇数 (a,b)，满足 $S_{2}(a)=l$，$S_{2}(b)=m$，且 $S_{2}(ab)=4$.

O653. 设 $n\ge 4$，实数 $a_{1}=a_{2}\ge a_{3}\ge\cdots\ge a_{n-1}=a_{n}$. 求证：$$n(a_{1}a_{2}+a_{2}a_{3}+\cdots+a_{n}a_{1})\ge (a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n})^{2}.$$

O654. 设 $f(x)$是一个整系数多项式，且最高次项系数为正. 求证：数列 $$x_{n}=\left\{\frac{6^{f(n)}}{n}\right\}$$ 在 $[0,1]$中稠密. ($\{a\}$表示 a的小数部分.)

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{Mathematical Reflections 2024 年第一期征解题}
\section*{Junior Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf J649.}求所有正整数$n$，使得$(n+3)(n^{2}+3n+3)$为三个素数$p>q>r$之积，且$p-r=6$. \vfill{\bf
↪ J650.}实数$a,b,c$满足$a^{2}+b^{2}+c^{2}=1$. 求证：$$\sqrt{1-bc}+\sqrt{1-ca}+\sqrt{1-ab}\ge\sqrt{6}.$$\vfill{\bf
↪ J651.}在圆内接四边形$ABCD$中，已知$$(AB-BC+CD+DA)(BC+CD+DA-AB)+AC\cdot BD=(AB+AD)(BC+CD).$$求$\angle
↪ ADC$的大小. \vfill{\bf J652.}在四边形$ABCD$中，$X$为对角线的交点. 设$r_{1},r_{2},r_{3},r_{4}$分别为$\triangle
↪ XAD,\triangle XDC,\triangle XCB,\triangle XBA$的内切圆半径. 求证:
↪ 若$$\dfrac{1}{r_{1}}+\dfrac{1}{r_{3}}=\dfrac{1}{r_{2}}+\dfrac{1}{r_{4}},$$则四边形$ABCD$有内切圆. \vfill{\bf
↪ J653.}设$a,b,c$为互异的实数. 求证：下列三个等式中，已知任意两个都能推出第三个：$$3ab+(b-c)(c-a)=\frac{16}{a-b},3bc」
↪ +(c-a)(a-b)=\frac{4}{b-c},3ca+(a-b)(b-c)=\frac{-20}{c-a}.$$是否存在这样的$(a,b,c)$?\vfill{\bf J654.}是否存在函数$f$:
↪ $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意$x\in\mathbb{Z}$，都有$$f(f(x))=x^{3}-2x+1?$$\vfill\newpage\section*{Mathematical
↪ Reflections 2024年第一期征解题}\section*{Senior Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf S649.}正实数$a,b,c$满足$ab+bc+ca+abc=4$. 求证：$$\frac{\sqrt{a}}{a+2}+\frac{\sqrt{b}}{b+2}+\frac{\sqrt{c}}{c+2}\le
↪ 1.$$\vfill{\bf S650.}在$\triangle ABC$中，设$A',B',C'$分别为旁切圆与三条边的切点. \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item
↪ 向量$\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{CC'}$能围成一个三角形当且仅当$\triangle ABC$为正三角形.
↪ \item 将上一问中的向量改成线段，结论是否仍成立？\end{enumerate}\vfill
```

{\bf S651.}设a,b,c为实数，求证：$$3a^{2}b^{2}c^{2}+3\sum_{cyc}(a^{4}b^{2}+a^{2}b^{4})\ge
↪ 3abc\sum_{cyc}a^{3}+4\sum_{cyc}a^{3}b^{3}.$$\vfill{\bf S652.}求最小的正整数m，使得存在正整数n，
↪ 满足$$1+2+\cdots+m=(2+3+\cdots+n)^{2}.$$\vfill{\bf
↪ S653.}非负实数$a_{1},a_{2},\cdots,a_{9}$满足$a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{9}=2$，且$a_{1}\ge a_{2}\ge\cdots\ge a_{9}$. 求证：
↪ $$a_{1}a_{2}+a_{2}a_{3}+\cdots+a_{9}a_{1}\le 1.$$\vfill{\bf S654.}正实数a,b,c满足$a+b+c=3$. 求证：
↪ $$\frac{8(ab+bc+ca)^{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 9\sqrt{abc}.$$\vfill\newpage\section*{Mathematical Reflections
↪ 2024年第一期征解题}\section*{Undergraduate Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf U649.}计算：$$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(1^{2}+n^{2})(2^{2}+n^{2})\cdots(n^{2}+n^{2})}{n!n^{n}}\right)^{1/n}.$$\vfill{\bf
↪ U650.}计算：$$I=\int_{1}^{e}\frac{(\ln x-1)^{2}-3}{(\ln x+2)^{2}}\mathrm{d}x.$$\vfill{\bf U651.}实数x,y,z,t满足$x+y+z+t=0$.
↪ 求证：$$\frac{x+1}{x^{2}+3}+\frac{y+1}{y^{2}+3}+\frac{z+1}{z^{2}+3}+\frac{t+1}{t^{2}+3}\le\frac{4}{3}.$$\vfill{\bf
↪ U652.}设k为正整数，n为正偶数. 求证：多项式$$1+x+\cdots+x^{2^{k}}+x^{n}$$
有一个复根的模长为1，当且仅当$v_{2}(n)<k$. \vfill{\bf U653.}求所有的有限群，其有真子群，且真子群的阶只能为2或3.
↪ \vfill{\bf U654.}计算：$$\int_{0}^{1}\frac{x\sqrt{x}\ln x}{x^{2}-x+1}\mathrm{d}x.$$\vfill\newpage\section*{Mathematical
↪ Reflections 2024年第一期征解题}\section*{Olympiad Problems}
\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}
{\bf O649.} 求所有正整数 n，使得 $$n!+1=(8a-3)^{2};(n+1)!+1=(8b+3)^{2};(2n-1)!+1=(8c-1)^{2},$$
其中 a,b,c 均为模 8 余 1 的正整数. \vfill{\bf O650.} 求最大的实数 λ，使得不等式
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}+\lambda\left(\frac{a^{2}+b^{2}+c^{2}}{(a+b+c)^{2}}-\frac{1}{3}\right)$$
恒成立，其中 a,b,c 为非负实数，且至多一个为 0. \vfill{\bf O651.} 求最大的实数 k，使得不等式
$$\frac{a^{3}+ka^{2}b}{a+b}+\frac{b^{3}+kb^{2}c}{b+c}+\frac{c^{3}+kc^{2}a}{c+a}\ge\frac{(k+1)(ab+bc+ca)}{2}$$
恒成立，其中a,b,c为非负实数，且至多一个为0. \vfill{\bf O652.}对正整数n，记$S_{2}(n)$为n在二进制表示下的数码和.
↪ 求证：存在正整数$l,m\ge 1402$，使得存在无穷多对奇数(a,b)，满足$S_{2}(a)=l$，$S_{2}(b)=m$，且$S_{2}(ab)=4$.
↪ \vfill{\bf O653.}设$n\ge 4$，实数$a_{1}=a_{2}\ge a_{3}\ge\cdots\ge a_{n-1}=a_{n}$. 求证：
↪ $$n(a_{1}a_{2}+a_{2}a_{3}+\cdots+a_{n}a_{1})\ge (a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n})^{2}.$$\vfill{\bf
↪ O654.}设$f(x)$是一个整系数多项式，且最高次项系数为正. 求证：数列$$x_{n}=\left\{\frac{6^{f(n)}}{n}\right\}$$
在 $[0,1]$ 中稠密. ($\{a\}$ 表示 a 的小数部分.) \vfill