数学竞赛每日一练第 18 期解答

2021-06-22 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e274dd41447f7460

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\sqrt{\dfrac{2n-1}{4n^2+1}}$，前 n 项和为 S_n，求与 $S_{128}-S_{32}$ 最接近的整数.

解答（PDF 中已展开）

解答易知

$$\sqrt{\frac{2n-1}{4n^2+1}}<\sqrt{\frac{1}{2n+1}}<\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$$

所以

$$\begin{aligned}S_{128}-S_{32}=&\sum_{k=33}^{128}\sqrt{\frac{2k-1}{4k^2+1}}\\<&\sum_{k=33}^{128}\left(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}\right)\\=&\sqrt{257}-\sqrt{65}\\=&\frac{192}{\sqrt{257}+\sqrt{65}}\\<&\frac{192}{16+8}\\=&8\end{aligned}$$

又有 $n\geq 2$ 时，

$$(2n-1)(2n+2)=4n^2+2n-2>4n^2+1$$

可知

$$\sqrt{\frac{2n-1}{4n^2+1}}>\sqrt{\frac{1}{2n+2}}>\sqrt{2n+4}-\sqrt{2n+2}$$

所以

$$\begin{aligned}
S_{128}-S_{32}=&\sum_{k=33}^{128}\sqrt{\frac{2k-1}{4k^2+1}}\\
>&\sum_{k=33}^{128}\left(\sqrt{2k+4}-\sqrt{2k+2}\right)\\
=&2\sqrt{65}-2\sqrt{17}\\
=&\frac{96}{\sqrt{65}+\sqrt{17}}\\
<&\frac{96}{8+\frac{1}{16}+4+\frac{1}{8}}\\
>&\frac{96}{12+\frac{1}{4}}\\
>&\frac{15}{2}
\end{aligned}$$

则可知与 $S_{128}-S_{32}$ 最接近的整数为 8.