一个取球次数数学期望的简单求法

2024-02-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e348217ea574834a

吴其建老师问了我这样一个问题：

> 一个袋子中有 m（$m \geq 3$）个除颜色外其余无差别的小球，其中有 3 个红球，从中不放回地取出小球直到取出第二个红球为止，记 X 为取出的小球个数，求 $\mathbb{E}(X)$.

直接求 X 的分布列并计算期望是可行的，但是较为复杂.

这里给出一个简单的求法：

本题等价于

> 将 m 个白球排成一列，并依次编号为 $1,2,\cdots,m$，再将其中 3 个染成红色，设第二个红球的编号为 X，求 $\mathbb{E}(X)$.

注意到，如果将球的编号反过来，即 $1,2,\cdots,m$ 变为 $m,m-1,\cdots,1$，那么 X 变为 $m+1-X$.

但红球共有 3 个，从左数的第二个红球与从右数的第二个红球是同一个，因此改变编号后，第二个红球编号的数学期望是不变的，即

$$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(m+1-X)=m+1-\mathbb{E}(X)$$

也即 $\mathbb{E}(X)=\dfrac{m+1}{2}$.

注：

可以将本题一般化，得到 $\mathbb{E}(X)$ 的递推公式后再求通项：

> 一个袋子中有 $m+n$ 个除颜色外其余无差别的小球，其中有 m 个红球，n 个蓝球. 从中不放回地取出小球直到恰取出 a 个红球、b 个蓝球为止，记 X 为取出的小球个数，求 $\mathbb{E}(X)$.

设 $\mathbb{E}(X)=f(m,n,a,b)$，对摸到的第一个球进行分类讨论，即可得：

$$\begin{aligned}&f(m,n,a,b)\\=&\frac{m}{m+n}f(m-1,n,\max\{a-1,0\},b)\\+&\frac{n}{m+n}f(m,n-1,a,\max\{b-1,0\})\end{aligned}$$

这个递推公式难以求出通项，但如果只要做出开始的题目，可取 $b=0$，此时不难求得

$$f(m,n,a,0)=\frac{m+n+1}{m+1}a$$

感兴趣的读者不妨试一试.