2023 年美国第四届圣诞数学奥林匹克

2023-04-03 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e389295b18071617

这是 aops 上圣诞节讨论组举办的一系列比赛之一，CIME 是 AIME 的模拟赛，CAMO 是 USAMO 的模拟赛，CJMO 是 USAJMO 的模拟赛。

点击阅读原文可查看英文原文及试题解析。

高级组（CAMO）

第一天

1. 在一个谷仓里，有 100 只小鸡在一个圆周上和平地坐着．起初，每只小鸡面对的是她左边或右边的小鸡中的一只．突然间，每只小鸡开始转向另一侧的邻居（以可能不同的非负速度），直到它们彼此相对为止．如果两只小鸡在某个时刻同时面对彼此，则它们会进行眼神接触．在这个过程中（包括开始和结束时），最多可能有多少对小鸡进行眼神接触?

2. 设圆 ω_1 和 ω_2 相交于 A、B 两点．点 C 在 ω_1 上，点 D 在 ω_2 上，满足 AD 和 BC 平行．直线 AC 和 BD 交于点 S，且点 S 在 ω_1 和 ω_2 的外部．求证：存在点 $U \in \omega_1$，点 $V \in \omega_2$，使得 SU 和 ω_1 相切，SV 和 ω_2 相切，且直线 AB 平分线段 UV.

3. 称一个多项式为 “二进制的”，如果其所有系数均为 0 或 1．设整系数多项式 $P(x)$，$Q(x)$，$R(x)$ 满足 $R(x) = x^n \cdot Q(1/x)$，其中 n 为某个整数．求证：若 $P(x) \cdot Q(x)$ 是二进制的，则 $P(x) \cdot R(x)$ 也是二进制的.

第二天

1. 设 c 为整数．求证：只存在有限多个正整数组 (a, b)，使得

$$\left\lfloor \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^a \right\rfloor = 2^b + c.$$

1. 求所有函数 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，满足：

- 只存在有限多个复数 x，使得 $f(x) = 0$;
- 对所有满足 $f(x) = yz$ 的复数 x，y，z，都有 $zf(x + y) = yf(x + z)$.

1. 设 $\mathcal{P}$ 是一个凸多边形，$2\mathcal{P}$ 是与 $\mathcal{P}$ 相似，且相似比为 2 的多边形．求证：可以用七个 $\mathcal{P}$ 覆盖 $2\mathcal{P}$.（多边形包含其内部和边界）

初级组（CJMO）

第一天

1. 求所有三元正整数组 (a,b,p)，p 为素数，使得

$$a^p+b^p=p!$$

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，H 为垂心．设点 N 为弧 AHC 的中点（在 $\triangle AHC$ 的外接圆上），D 为 AB 上一点，满足 DN 平行于 AC，E 为 D 关于 AH 的对称点．求证：$\angle DHB$ 和 $\angle ENC$ 相等或互补．

2. 同高级组第 1 题

第二天

1. 设 A、B 为圆 ω 上两个定点，圆心为 O，X 为线段 AB 上一个动点．$\triangle AXO$ 的外接圆和以 X 为圆心，且过点 B 的圆交于 P、Q 两点．求证：直线 PQ 过定点．

2. 求所有正合数 n，使得能将 n 的所有约数按照某种方式排列成 d_1，d_2，$\cdots$，d_k，满足

$$\gcd(d_1,d_2,d_3)=\gcd(d_2,d_3,d_4)=\cdots=\gcd(d_k,d_1,d_2)=1$$

1. 同高级组第 5 题