2024 年加拿大数学奥林匹克资格复活赛

2024-03-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e3933430503492ef

北美学生参加加拿大数学奥林匹克的主要方法，是参加每年 10 月的加拿大数学公开赛 (COMC)，如果进入其中的前 50 名，即可直接入围加拿大数学奥林匹克，如果未能进入前 50 名，但进入了前 125 名，则可以参加大约 2 月举行的复活赛，在复活赛中表现优秀的同学也可入围加拿大数学奥林匹克. 复活赛是”带回家”类型的考试，每个同学有一周的时间来完成这些题目并上传 pdf.

2024 年加拿大数学奥林匹克资格复活赛

程国根译

1. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有

$$f(x+f(xy))=f(x)(1+y).$$

2. 如果正整数 N 的三进制表示中没有两个相邻的数码是相同的，则称 N 是好数. 例如：289 是好数，因为它的三进制表示为 1012013. 将所有好数从小到大排列，求第 2024 个好数（用十进制表示）.

3. 锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H，$AB<AC$，M 为弧 BAC 的中点. 已知 B,H,M 三点共线，点 M 到 AB,BC 的距离分别为 1 和 6. 求 $\triangle ABC$ 面积的所有可能值.

4. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\dfrac{1}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n^2}{a_n^2-a_n+1}$，$n\in\mathbb{N}_+$. 求证：对任意正整数 n，

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{2^{n-1}}}<a_1+a_2+\ldots+a_n<\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{2^n}}.$$

5. 设 $S=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 4,x,y\in\mathbb{Z}\}$. 在其中随机选取 3 点作为一个三角形的顶点，求三角形面积的平方的数学期望.

1

6. 对任意给定的实数 p,q,r，求方程组

$$\begin{cases} a^2+b+c=p \\ a+b^2+c=q \\ a+b+c^2=r \end{cases}$$

的解 (a,b,c) 的组数的最大值．并给出取最大值时的一组 p,q,r．

7. a. 在 $\triangle ABC$ 中，I 为内心，H 为 $\triangle BIC$ 的垂心．求证：$AH \parallel BC$ 当且仅当 H 在以 AI 为直径的圆上．

b. 在 $\triangle ABC$ 中，I 为内心，O 为外心，H 为垂心．已知 $IO=IH$，求证：$\triangle ABC$ 的内角中必有一个为 60°．

8. 给定一个由 X 和 O 组成的序列，序列长度为 N，其中没有连续三个字符是相同的．Maia 可以交换序列中两个相邻的字符，每次交换后，如果产生了连续三个及以上的相同字符，它们将被全部消除，直至不再有连续三个字符是相同的．例如，对初始序列 XXOOXOXO，Maia 交换第 5 个和第 6 个字符，消除过程如下：

$$XXOOOXXO \to XXXXO \to O.$$

求 N 的最大值，使得 Maia 无法保证在一系列交换后，能够消除所有字符．（如果能正确证明 N 的上界和下界，将获得部分分数）

2

1. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $$f(x + f(xy)) = f(x)(1 + y).$$

2. 如果正整数 N的三进制表示中没有两个相邻的数码是相同的，则称 N是好数．例如：289是好数，因为它的三进制表示为 1012013．将所有好数从小到大排列，求第 2024个好数（用十进制表示）．

3. 锐角 $\triangle ABC$的垂心为 H，$AB<AC$，M为弧 BAC的中点．已知 B,H,M三点共线，点 M到 AB,BC的距离分别为 1和 6．求 $\triangle ABC$面积的所有可能值．

4. 数列 $\{a_{n}\}$满足：$a_{1}=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=\frac{a_{n}^{2}}{a_{n}^{2}-a_{n}+1}$，$n\in\mathbb{N}_{+}$．求证：对任意正整数 n，$$\frac12 - \frac{1}{3^{2^{n-1}}} < a_1 + a_2 +... + a_n <\frac12 - \frac{1}{3^{2^n}} .$$

5. 设 $S=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 4,x,y\in\mathbb{Z}\}$．在其中随机选取 3点作为一个三角形的顶点，求三角形面积的平方的数学期望．

6. 对任意给定的实数 p,q,r，求方程组 $$\begin{cases} a^2 + b + c = p \\ a + b^2 + c = q \\ a + b + c^2 = r \end{cases}$$的解 (a,b,c)的组数的最大值．并给出取最大值时的一组 $

p,q,r$.

7.

1. 在 $\triangle ABC$中，I为内心，H为 $\triangle BIC$的垂心. 求证：$AH\parallel BC$当且仅当 H在以 AI为直径的圆上.
2. 在 $\triangle ABC$中，I为内心，O为外心，H为垂心. 已知 $IO=IH$，求证：$\triangle ABC$的内角中必有一个为 60°.

8. 给定一个由 X 和 O 组成的序列，序列长度为 N，其中没有连续三个字符是相同的. Maia 可以交换序列中两个相邻的字符，每次交换后，如果产生了连续三个及以上的相同字符，它们将被全部消除，直至不再有连续三个字符是相同的. 例如，对初始序列 XXOOXOXO，Maia 交换第 5个和第 6个字符，消除过程如下：$$XXOOOXXO\to XXXXO\to O.$$求 N的最大值，使得 Maia 无法保证在一系列交换后，能够消除所有字符. （如果能正确证明 N的上界和下界，将获得部分分数）

解答（PDF 中已展开）

\ex 求所有函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意$x,y\in\mathbb{R}$，都有$$f(x + f(xy)) = f(x)(1 + y).$$\vfill\ex
↪ 如果正整数N的三进制表示中没有两个相邻的数码是相同的，则称N是好数. 例如：289是好数，
↪ 因为它的三进制表示为1012013. 将所有好数从小到大排列，求第2024个好数（用十进制表示）. \vfill\ex 锐角$\triangle
↪ ABC$的垂心为$H$，$AB<AC$，$M$为弧$BAC$的中点. 已知$B,H,M$三点共线，点$M$到$AB,BC$的距离分别为$1$和$6$.
↪ 求$\triangle ABC$面积的所有可能值. \vfill\ex 数列$\{a_{n}\}$满足：$a_{1}=\frac{1}{3}$，
↪ $a_{n+1}=\frac{a_{n}^{2}}{a_{n}^{2}-a_{n}+1}$，$n\in\mathbb{N}_{+}$. 求证：对任意正整数$n$，$$\frac12 -
↪ \frac{1}{3^{2^{n-1}}} < a_1 + a_2 +... + a_n <\frac12 - \frac{1}{3^{2^n}} .$$\vfill\ex 设$S=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le
↪ 4,x,y\in\mathbb{Z}\}$. 在其中随机选取$3$点作为一个三角形的顶点，求三角形面积的平方的数学期望. \vfill\ex
↪ 对任意给定的实数p,q,r，求方程组$$\begin{cases} a^2 + b + c = p \\a + b^2 + c = q \\a + b + c^2 = r
↪ \end{cases}$$的解(a,b,c)的组数的最大值. 并给出取最大值时的一组p,q,r. \vfill\ex \begin{enumerate}[label=\alph*.]\item
↪ 在$\triangle ABC$中，I为内心，H为$\triangle BIC$的垂心. 求证：$AH\parallel BC$当且仅当H在以AI为直径的圆上.
↪ \item 在$\triangle ABC$中，I为内心，O为外心，H为垂心. 已知$IO=IH$，求证：$\triangle
↪ ABC$的内角中必有一个为$60^{\circ}$. \end{enumerate}\vfill\ex 给定一个由X和O组成的序列，序列长度为N，
↪ 其中没有连续三个字符是相同的. Maia可以交换序列中两个相邻的字符，每次交换后，如果产生了连续三个及以上的相同字符，
↪ 它们将被全部消除，直至不再有连续三个字符是相同的. 例如，对初始序列XXOOXOXO，Maia交换第5个和第6个字符，
↪ 消除过程如下：$$XXOOOXXO\to XXXXO\to O.$$求N的最大值，使得Maia无法保证在一系列交换后，能够消除所有字符.
↪ （如果能正确证明N的上界和下界，将获得部分分数）\vfill

一年一度全球数学爱好者的盛会，就差你了！

