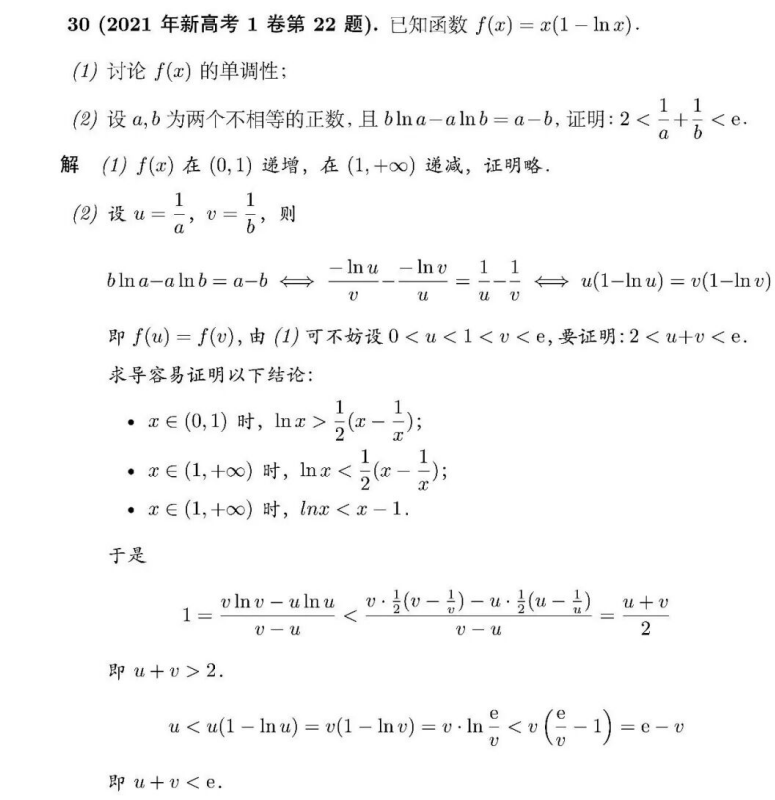
高考经典极值点偏移问题另证——2021 年新高考 1 卷第 22 题

2025-05-12　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e39ca7febf39600a

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读；下方附本站人工转写的文字版，只作阅读与检索之用，若与原图有出入，以公众号原文为准。



30 (2021 年新高考 1 卷第 22 题). 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 a,b 为两个不相等的正数, 且 $b\ln a-a\ln b=a-b$, 证明: $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}$.

解 *(1)* $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增, 在 $(1,+\infty)$ 递减, 证明略.

(2) 设 $u=\frac{1}{a}$, $v=\frac{1}{b}$, 则

$$b\ln a-a\ln b=a-b \iff \frac{-\ln u}{v}-\frac{-\ln v}{u}=\frac{1}{u}-\frac{1}{v} \iff u(1-\ln u)=v(1-\ln v)$$

即 $f(u)=f(v)$, 由 *(1)* 可不妨设 $0<u<1<v<\mathrm{e}$, 要证明: $2<u+v<\mathrm{e}$.

求导容易证明以下结论:

- $x\in(0,1)$ 时, $\ln x>\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$;
- $x\in(1,+\infty)$ 时, $\ln x<\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$;
- $x\in(1,+\infty)$ 时, $lnx<x-1$.

于是

$$1=\frac{v\ln v-u\ln u}{v-u}<\frac{v\cdot\frac{1}{2}(v-\frac{1}{v})-u\cdot\frac{1}{2}(u-\frac{1}{u})}{v-u}=\frac{u+v}{2}$$

即 $u+v>2$.

$$u<u(1-\ln u)=v(1-\ln v)=v\cdot\ln\frac{\mathrm{e}}{v}<v\left(\frac{\mathrm{e}}{v}-1\right)=\mathrm{e}-v$$

即 $u+v<\mathrm{e}$.

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 第 30 题（2021 年新高考 1 卷第 22 题）　已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$。(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；(2) 设 a,b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}$。
2. 解　(1) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，在 $(1,+\infty)$ 递减，证明略。　(2) 设 $u=\frac{1}{a}$，$v=\frac{1}{b}$，则 $b\ln a-a\ln b=a-b\iff\frac{-\ln u}{v}-\frac{-\ln v}{u}=\frac{1}{u}-\frac{1}{v}\iff u(1-\ln u)=v(1-\ln v)$。即 $f(u)=f(v)$，由 (1) 可不妨设 $0<u<1<v<\mathrm{e}$，要证明 $2<u+v<\mathrm{e}$。求导容易证明：当 $x\in(0,1)$ 时，$\ln x>\frac12\left(x-\frac1x\right)$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x<\frac12\left(x-\frac1x\right)$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x<x-1$。于是 $1=\frac{v\ln v-u\ln u}{v-u}<\frac{v\cdot\frac12\left(v-\frac1v\right)-u\cdot\frac12\left

(u-\frac1u\right)}{v-u}=\frac{u+v}{2}$，即 $u+v>2$。又 $u<u(1-\ln u)=v(1-\ln v)=v\ln\frac{\mathrm{e}}{v}<v\left(\frac{\mathrm{e}}{v}-1\right)=\mathrm{e}-v$，即 $u+v<\mathrm{e}$。