加拿大 CRUX 杂志问题 4681-4690

2021-12-09 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e3bcdfe60a6b9fe8

加拿大 CRUX 杂志问题 4681-4690

原文见：https://cms.math.ca/wp-content/uploads/2021/11/CRUXv47n9.pdf

1. (Michel Bataille 供题) 设 n 为正整数,

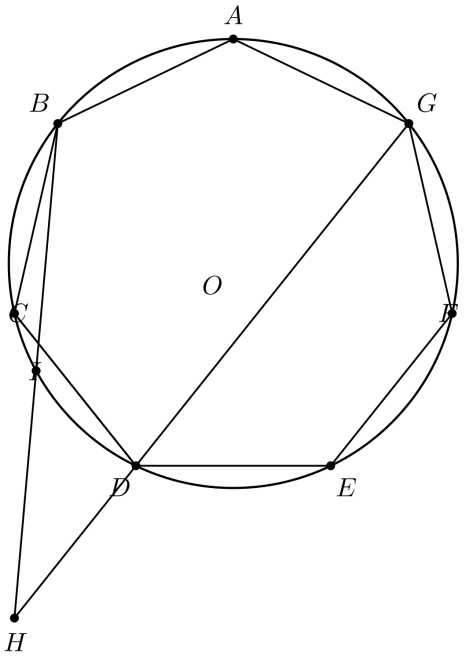
$$P_n(x)=\prod_{k=1}^{n}\left(x+4\sin^2\frac{2k\pi}{2n+1}\right).$$

求 $P_n(0)$ 和 $P_n'(0)$ 的值.

2. (Goran Conar 供题) 求集合 $\left\{\sqrt[mn]{m+n}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$ 的上确界和下确界 (若其存在).

3. (Warut Suksompong 供题) 对非负整数 n, 记 $S(n)$ 为 n 在十进制表示中的各位数码之和. $P(x)$ 为一个非常数的整系数多项式. 求证: 对任意实数 r, 存在整数 k, 使得 $S(|P(k)|)>r$.

4. (Alin Cretu 供题) 已知正七边形 $ABCDEFG$ 圆 Ω. 设 $BH\cap\Omega=\{I\}$ 且 G, D, H 三点共线. 若 $DH=DC$, 求证: $HI=IB$.



5. (Abdollah Zohrabi 供题) 一个学校有 24 个学生, 2 间教室, 每间教室可以坐 12 人. 每个学生每天都去上学, 而且恰好去其中一间教室. 求证: 可以安排所有学生去上 14 天学校, 使得任意一对学生至少在同一个教室里出现一次.

6.（Nguyen Viet Hung 供题）已知 a，b，c 为正实数，求证：

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a}{2}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}.$$

7.（Ovidiu Furdui and Alina Sîntâmârian 供题）计算：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2+\frac{1}{4n}\right).$$

8.（Mihaela Berindeanu 供题）在矩形 $ABCD$ 中，M，P 在边 CD 上，N 在边 BC 上，满足 $DM=MC$，$NB=3NC$，$PN\perp AN$. 若 K 为 MN 的中点，求证：$\measuredangle(PAM)=\measuredangle(KAN)$.

9.（Daniel Sitaru 供题）已知正整数 x，y，z 满足 $x+y+z=3$，解方程：

$$x^{x^2}\cdot y^{y^2}\cdot z^{z^2}=\frac{1}{(x^2)^{xz}\cdot(y^2)^{yz}\cdot(z^2)^{zy}}.$$

（译者注：本题原文中，x，y，z 为正整数，疑似有误，猜测应均为正实数）

1.（Leonard Giugiuc 供题）已知非负实数 x,y,z 满足 $xy+yz+zx>3$，且 $xy+yz+zx+xyz<4$. 求证：

$$x+y+z>xyz.$$

$$x+y+z>xyz.$$