2024 年北欧数学奥林匹克

2024-04-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e4b74238e8ace39f

2024 年北欧数学奥林匹克

程国根 译

1. 记 $T(a)$ 为 a 的数码和. 求所有正整数 R, 使得存在正整数 n, 满足 $\dfrac{T(n^2)}{T(n)}=R$.

2. 四边形 $\mathcal{Q}_1$ 四边的中点共圆. 求证: 存在圆内接四边形 $\mathcal{Q}_2$, 其四边长和 $\mathcal{Q}_1$ 的相等, 且有两个相等的内角.

3. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 都有

$$f(f(x)f(y)+y)=f(x)y+f(y-x+1).$$

4. Alice 和 Bob 进行一个游戏. 首先, Alice 做一个正整数集的划分 $\mathcal{C}$ (可以为无限集), 使得每个正整数恰属于 $\mathcal{C}$ 中的一个集合. 然后 Bob 进行有限次以下操作:

取一个未被选择过的集合 $S\in\mathcal{C}$, 设 D 为由所有能整除 S 中至少一个元素的正整数组成的集合. 然后在 $\mathcal{C}$ 中加入集合 $D\setminus S$ (可能是空集).

如果在 Bob 完成所有操作后, $\mathcal{C}$ 中存在两个相等的集合, 那么 Bob 获胜; 否则, Alice 获胜.

问: 谁有必胜策略?

(译者注: 本题中 $\mathcal{C}$ 应为可重集)

2024 年北欧数学奥林匹克

程国根 译

1. 记 $T(a)$为 a的数码和. 求所有正整数 R, 使得存在正整数 n, 满足 $\frac{T(n^2)}{T(n)}=R$.

2. 四边形 $\mathcal{Q}_1$四边的中点共圆. 求证: 存在圆内接四边形 $\mathcal{Q}_2$, 其四边长和 $\mathcal{Q}_1$的相等, 且有两个相等的内角.

3. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 都有 $$f(f(x)f(y)+y)=f(x)y+f(y-x+1).$$

4. Alice 和 Bob 进行一个游戏. 首先，Alice 做一个正整数集的划分 $\mathcal{C}$（可以为无限集），使得每个正整数恰属于 $\mathcal{C}$中的一个集合. 然后 Bob 进行有限次以下操作: 取一个未被选择过的集合 $S\in\mathcal{C}$，设 D为由所有能整除 S中至少一个元素的正整数组成的集合. 然后在 $\mathcal{C}$中加入集合 $D \setminus S$（可能是空集）. 如果在 Bob 完成所有操作后，$\mathcal{C}$中存在两个相等的集合，那么 Bob 获胜；否则，Alice 获胜. 问：谁有必胜策略？**（译者注：本题中 $\mathcal{C}$应为可重集）**

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年北欧数学奥林匹克}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\ex 记$T(a)$为$a$的数码和.
↪ 求所有正整数$R$，使得存在正整数$n$，满足$\frac{T(n^2)}{T(n)}=R$. \vfill\ex 四边形$\mathcal{Q}_{1}$四边的中点共圆.
↪ 求证：存在圆内接四边形$\mathcal{Q}_{2}$，其四边长和$\mathcal{Q}_{1}$的相等，且有两个相等的内角. \vfill\ex
↪ 求所有函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意$x,y\in\mathbb{R}$，都有$$f(f(x)f(y)+y)=f(x)y+f(y-x+1).$$\vfill\ex
↪ Alice和Bob进行一个游戏. 首先，Alice做一个正整数集的划分$\mathcal{C}$（可以为无限集），
↪ 使得每个正整数恰属于$\mathcal{C}$中的一个集合. 然后Bob进行有限次以下操作:
取一个未被选择过的集合$S\in\mathcal{C}$，设$D$为由所有能整除$S$中至少一个元素的正整数组成的集合.
↪ 然后在$\mathcal{C}$中加入集合$D \setminus S$（可能是空集）.
如果在 Bob 完成所有操作后，$\mathcal{C}$ 中存在两个相等的集合，那么 Bob 获胜；否则，Alice 获胜.
问：谁有必胜策略？
\textbf{（译者注：本题中 $\mathcal{C}$ 应为可重集）}\vfill
```