从限制条件个数出发的消元法：2018 年高联加试 P1 的详细分析

2026-09-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e4ee676104f6fda4

题目（2018 年全国高中数学联赛加试 P1）

设 n 为正整数，$a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,A,B$ 均为正实数，满足 $a_i\le b_i$，$a_i\le A$ $(1\le i\le n)$. $\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\le\frac{B}{A}$ 证明：

$\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i+1}{a_i+1}\le\frac{B+1}{A+1}$.

思路分析

题目同时出现 n 对变量和两个整体变量 A,B，各条件又分布在不同层次．直接展开乘积会迅速产生大量下标，逐项比较也缺少对应关系．一个更自然的入口是先看每个变量参与了多少条约束．参与条件少的变量活动范围更清楚，配合单调性，常常可以直接压到允许区间的边界．到达边界后，相关变量若能从式子中退出，问题的维数就会下降一层．

一、从限制数量寻找入口

对固定的 i，a_i 同时受到 $a_i\le b_i$ 与 $a_i\le A$ 的限制；b_i 既和 a_i 相连，又进入整体乘积．相比之下，B 只出现在条件 $\prod_{i=1}^{n}b_i/a_i\le B/A$ 以及待证式右端．因此 B 的允许范围最容易描述，先处理 B 可以最快减少条件的数量．

这种观察和几何中的消点法很接近．一张几何关系图里，某个点只连接少量直线、圆或角关系时，先处理这个点，往往能让整张图迅速变稀疏．代数中可以把变量看成点，把约束看成连线．每完成一次消元，就重新观察剩余变量的连接情况；原来处于次要位置的变量，也可能在下一层承担主要约束．

二、先把 B 压到边界

记

$$R_k=\prod_{i=1}^{k}\frac{b_i}{a_i},$$

$$L_k=\prod_{i=1}^{k}\frac{b_i+1}{a_i+1},$$

$$\Phi_R(x)=\frac{xR+1}{x+1}=R-\frac{R-1}{x+1}.$$

由 $b_i\ge a_i$ 可知 $R_k\ge 1$，所以当 $R\ge 1$ 时，$\Phi_R(x)$ 随 $x>0$ 单调不减.

整体乘积条件给出 $B \geq AR_n$. 固定 A 后，$(B+1)/(A+1)$ 随 B 增大而增大，最小值出现在 $B = AR_n$. 于是右端可压缩成 $\Phi_{R_n}(A)$，原问题只需继续研究 $L_n \leq \Phi_{R_n}(A)$. 此时 B 已经离开后续计算，整体乘积条件也被吸收到 R_n 中.

三、排序把 A 的多条限制压成一条

各对 (a_i, b_i) 在两个乘积中的地位完全相同，可以同时交换下标. 取 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. 原来的 $A \geq a_1, \ldots, A \geq a_n$ 便合并为 $A \geq a_n$.

函数 Φ_{R_n} 单调不减，所以允许的 A 中，$A = a_n$ 给出最小的右端. 问题继续缩成 $L_n \leq \Phi_{R_n}(a_n)$. 这时 A 也到达了边界，最后一对变量开始具备消去的条件.

四、第 n 对变量从乘积中脱落

把第 n 对变量单独拆出：

$$
\begin{aligned}
& L_n \leq \Phi_{R_n}(a_n) \\
\Longleftrightarrow & L_{n-1}\frac{b_n+1}{a_n+1} \leq \frac{R_{n-1}b_n+1}{a_n+1} \\
\Longleftrightarrow & L_{n-1} \leq \frac{R_{n-1}b_n+1}{b_n+1} = \Phi_{R_{n-1}}(b_n).
\end{aligned}
$$

a_n 已经完全消失，b_n 也不再出现在原来的两个乘积中. 剩余变量只有前 $n-1$ 对，右端仍保留 $\Phi_R(x)$ 的形式.

排序又给出 $a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n$，因此 b_n 成为剩余所有 a_i 的共同上界，正好接过 A 的位置. **昔日屠龙少年，终成恶龙**：刚刚还属于被消去的第 n 对变量，转眼已经成为下一层的上界变量.

五、同一结构开始重复

当前式子是 $L_{n-1} \leq \Phi_{R_{n-1}}(b_n)$. 由 $b_n \geq a_{n-1}$ 以及 $\Phi_{R_{n-1}}$ 的单调性，可以把新的上界继续压到 a_{n-1}. 到达 a_{n-1} 后，第 $n-1$ 对变量按照完全相同的代数方式从乘积中脱落，b_{n-1} 随即接过上界角色.

写成第 k 层的形式，就是

$$
\begin{aligned}
& L_k \leq \Phi_{R_k}(a_k) \Longleftrightarrow L_{k-1} \leq \Phi_{R_{k-1}}(b_k), \\
& b_k \geq a_{k-1} \Longrightarrow \Phi_{R_{k-1}}(b_k) \geq \Phi_{R_{k-1}}(a_{k-1}).
\end{aligned}
$$

第一行负责去掉第 k 对变量中的乘积因子，第二行把刚出现的 b_k 压到下一层边界. 两步交替进行，变量数每次减少一个.

六、消元链的顺序

从变量角色看，整个过程沿着

$$A \longrightarrow a_n \longrightarrow b_n$$
$$\longrightarrow a_{n-1} \longrightarrow b_{n-1}$$
$$\longrightarrow \cdots \longrightarrow a_1 \longrightarrow b_1$$

推进. $A \to a_n$ 来自单调性，$a_k \to b_k$ 对应第 k 对变量从乘积中脱落，$b_k \to a_{k-1}$ 再次来自单调性. 每一层都保持同一种函数形式，所以新的变量无需重新设计处理方法.

七、最后一层

当只剩第一对变量时，$R_1 = b_1/a_1$，$L_1 = (b_1+1)/(a_1+1)$，并且 $\Phi_{R_1}(a_1) = (b_1+1)/(a_1+1)$. 消元链在这一层落到等号，前面的各层便依次闭合.

接下来只需倒过来，用数学归纳法的方式写出证明即可，留给读者完成.