一道复数求值问题的另解及推广

2021-07-17 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e515163eab7c4706

本文首发于公众号：平行线竞赛强基

平行线竞赛强基

前两天，闫老师发了如下题目：又一道复数相关的求值题

题目设 a，b，c，d 是 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+5x-4$ 的零点，求

$$(a+1+\frac{1}{a})(b+1+\frac{1}{b})(c+1+\frac{1}{c})(d+1+\frac{1}{d})$$

的值.

本题关键是求出

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)(d^2+d+1)$$

可以注意到

$$\prod(a^2+a+1)=\prod\frac{a^3-1}{a-1}=\frac{g(1)}{f(1)}$$

其中 $g(x)$ 为以 a^3，b^3，c^3，d^3 为根的四次多项式，且首项系数和 $f(x)$ 相同 (也为 1).

此时问题变为：已知 a，b，c，d 为某四次多项式的四个根，求以 a^3，b^3，c^3，d^3 为四个根的四次多项式.

下面考虑更一般的情形：

如果 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 为 n 次多项式 $f(x)$ 的 n 个根，即

$$f(x)=A(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

则

$$f(\varepsilon_0\sqrt[k]{x})f(\varepsilon_1\sqrt[k]{x})\cdots f(\varepsilon_{n-1}\sqrt[k]{x})$$

为以 x_1^k，x_2^k，$\cdots$，x_n^k 为 n 个根的 n 次多项式. 其中，ε_0，ε_1，$\cdots$，ε_{n-1} 为 $x^n=1$ 的 n 个复根.

事实上，以 x_1^k，x_2^k，$\cdots$，x_n^k 为 n 个根的 n 次多项式 $g(x)$ 可写为：

$$\begin{aligned}g(x)=&(x-x_1^k)(x-x_2^k)\cdots(x-x_n^k)\\=&((\sqrt[k]{x})^k-x_1^k)((\sqrt[k]{x})^k-x_2^k)\cdots((\sqrt[k]{x})^k-x_n^k)\\=&\prod_{i=1}^{n}\left((\sqrt[k]{x})^k-x_i^k\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\prod_{i=1}^{n}\left((-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}\left(\varepsilon_j\sqrt[k]{x}-x_i\right)\right)\\
&=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}\left(\prod_{i=1}^{n}\left(\varepsilon_j\sqrt[k]{x}-x_i\right)\right)\\
&=(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}\left(f\left(\varepsilon_j\sqrt[k]{x}\right)\right)
\end{aligned}
$$

忽略首项系数的区别，结论成立.

上述过程用到了：

$$a^n-b^n=(-1)^n(\varepsilon_0a-b)(\varepsilon_1a-b)\cdots(\varepsilon_{n-1}a-b)$$

最后出现的 $\prod\limits_{j=0}^{k-1}\left(f\left(\varepsilon_j\sqrt[k]{x}\right)\right)$ 实际上就是 n 阶循环矩阵的行列式. 我们有如下定理：

> 设 A 是以 n 个复数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为元素的 n 阶循环矩阵，则 $\det A=f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1})$. 其中 $f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$ 为复数域上的 $n-1$ 次多项式，ε_0，ε_1，$\cdots$，ε_{n-1} 为 $x^n-1=0$ 的 n 个根.

考虑将 $f(x)$ 的各项按次数模 k 分类，可以证明如下结论：

> 任意多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 可以唯一地表示为
>
> $$f(x)=f_0(x^k)+xf_1(x^k)+\cdots+x^{k-1}f_{k-1}(x^k)$$
>
> 其中
>
> $$f_0(x)=a_0+a_kx+a_{2k}x^2+\cdots$$
>
> $$f_1(x)=a_1+a_{k+1}x+a_{2k+1}x^2+\cdots$$
>
> $$\cdots$$
>
> $$f_{k-1}(x)=a_{k-1}+a_{2k-1}x+a_{3k-1}x^2+\cdots$$

利用上述两个结论化简 $\prod\limits_{j=0}^{k-1}\left(f\left(\varepsilon_j\sqrt[k]{x}\right)\right)$：

$$
\begin{aligned}
&\prod_{j=0}^{k-1}\left(f\left(\varepsilon_j\sqrt[k]{x}\right)\right)\\
=&\prod_{j=0}^{k-1}\left(f_0((\varepsilon_j\sqrt[k]{x})^k)+\varepsilon_j\sqrt[k]{x}f_1((\varepsilon_j\sqrt[k]{x})^k)+\cdots+(\varepsilon_j\sqrt[k]{x})^{k-1}f_{k-1}((\varepsilon_j\sqrt[k]{x})^k)\right)\\
=&\prod_{j=0}^{k-1}\left(f_0(x)+\varepsilon_j\sqrt[k]{x}f_1(x)+\cdots+(\varepsilon_j\sqrt[k]{x})^{k-1}f_{k-1}(x)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\varphi(\varepsilon_0)\varphi(\varepsilon_1)\cdots\varphi(\varepsilon_{k-1}) \\
&=\begin{vmatrix}
f_0(x) & \sqrt[k]{x}f_1(x) & \cdots & (\sqrt[k]{x})^{k-1}f_{k-1}(x) \\
(\sqrt[k]{x})^{k-1}f_{k-1}(x) & f_0(x) & \cdots & (\sqrt[k]{x})^{k-2}f_{k-2}(x) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\sqrt[k]{x}f_1(x) & (\sqrt[k]{x})^2f_2(x) & \cdots & f_0(x)
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

其中

$$\varphi(t)=f_0(x)+\sqrt[k]{x}f_1(x)\cdot t+\cdots+(\sqrt[k]{x})^{k-1}f_{k-1}(x)\cdot t^{k-1}$$

这就得到了我们所需的结论，下面回到原题，来看看这个方法的优势所在.

我们有 $f(x)=x^4-3x^3+2x^2+5x-4$，$k=3$. 于是

$$f_0(x)=-4-3x$$

$$f_1(x)=5+x$$

$$f_2(x)=2$$

于是

$$
\begin{aligned}
g(x)&=\begin{vmatrix}
-4-3x & \sqrt[3]{x}(5+x) & (\sqrt[3]{x})^2\cdot 2 \\
\sqrt[3]{x}(5+x) & (\sqrt[3]{x})^2\cdot 2 & -4-3x \\
(\sqrt[3]{x})^2\cdot 2 & -4-3x & \sqrt[3]{x}(5+x)
\end{vmatrix} \\
&=(-4-3x)^3+(\sqrt[3]{x}(5+x))^3+((\sqrt[3]{x})^2\cdot 2)^3-3(-4-3x)(\sqrt[3]{x}(5+x))((\sqrt[3]{x})^2\cdot 2)
\end{aligned}
$$

所求出的 $g(x)$ 首项系数为 1，且

$$g(1)=(-7)^3+6^3+2^3-3\cdot(-7)\cdot 6\cdot 2=133$$

又 $f(1)=1$，$abcd=-4$，故本题答案为 $-\dfrac{133}{4}$.