2021 年科索沃数学奥林匹克

2021-04-02　原文链接

网站版本 3f6bf801342b · 文章 ID h_e5807fb6f615ba67

九年级组

1. 求所有两位的自然数，使得其减去自身数码和的 7 倍后，所得的结果为一个素数.

2. Dua 的手中有小于 20 的所有正奇数，Asija 的手中有小于 21 的所有正偶数. 他们进行以下游戏：在自己的每个回合中，他们从对方手中取走一个数字. 该回合结束后，他们可以固定手中的两个及以上的连续数字，使对方在下一回合中无法取走这些被固定的数字之一，然后进入对方的回合. 首先获得 10 个连续数字的一方赢得比赛. 问：是否存在一方有必胜策略?

3. 求所有实数 a,b,c,d，使得
$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+d^2\\&=a+b+c+d-ab=3.\end{aligned}$$

4. 在凸五边形 $ABCDE$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$\angle BCD=135^\circ$，$\angle DEA=60^\circ$，且 $AB=BC=CD=DE$. 求 $\angle DAE$ 的大小.

十年级组

1. 有九个质量依次为 $1kg$，$2kg$，$\cdots$，$9kg$ 的砝码. 在天平左侧放 6 个砝码，天平右侧放 3 个砝码，使得右侧比左侧更重. 共有多少种放置的方法?

2. 求所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对于任意实数 x,y，均有 $f(x)f(y)+f(xy)\le x+y$.

3. 求证：对于任意自然数 a,b,c,d，存在无穷多个自然数 n，使得 $a^n+b^n+c^n+d^n$ 为合数.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，M 为 BC 边的中点. D 点满足 $AD=AB$，$AD\perp AB$，且 C 和 D 在直线 AB 的两侧. 求证：$\sqrt{AB\cdot AC+BC\cdot AM}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}CD$.

十一年级组

1. 将笛卡尔坐标平面中的九个点 $(0,0)$，$(0,1)$，$(0,2)$，$(1,0)$，$(1,1)$，$(1,2)$，$(2,0)$，$(2,1)$，$(2,2)$ 染上红、蓝二色之一. 求证其中必存在三顶点同色的等腰直角三角形.

2. 是否存在自然数 n，使得 $n!$ 的末尾恰好有 2021 个 0?

3. 正实数 a,b,c 满足 $a^5+b^5+c^5=ab^2+bc^2+ca^2$. 求证：
$$\frac{a^2+b^2}{b}+\frac{b^2+c^2}{c}+\frac{c^2+a^2}{a}\ge 2(ab+bc+ca).$$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$. $\angle BAC$ 的角平分线与 BC 交于点 D，D' 为 D 关于 BC 边中点的对称点. 过 D' 作 AB 的平行线，与 AD 交于点 X. 证明：直线 AC 与 $\triangle XCD'$ 的外接圆相切.

十二年级组

1. 8×8 的国际象棋盘上的每一个格子中都放置着一枚黑马或白马. 问：棋盘上最多能放置多少枚黑马，使得任意一枚黑马能攻击到的黑马个数均不超过 1.
   注：这里假设黑马之间可以相互攻击.

2. 求所有 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对于任意 $x,y\in\mathbb{R}$，均有 $f(f(x)(f(y)-1))=xy-1$.

3. O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心. X,Y 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上（异于 A,B,C 三点），满足有向角 $\angle XOY$ 和 $\angle BAC$ 相等. 求证：$\triangle BXY$ 的垂心为一定点.

4. 设 $P(x)$ 为整系数多项式，记 $\mathbb{P}$ 为所有素数构成的集合. 证明：

$$\mathbb{S}=\{p\in\mathbb{P}|\text{存在}n,\ \text{使得}p|P(n)\}$$

为无限集当且仅当 $P(x)$ 不是常数多项式.