# 2023 年菲律宾数学奥林匹克

2023-03-20 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e5e2bdcda3107413

## 第一天

1. 求所有正整数对 $(a,b)$，使得 $a^2+b^2+25=15ab$，且 $a^2+ab+b^2$ 是一个素数.

2. 求所有素数 $p$，使得 $\dfrac{2^{p+1}-4}{p}$ 是一个完全平方数.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$. 过点 $A$ 作 $\triangle ABC$ 外接圆的切线，和直线 $BC$ 交于点 $P$. 设 $M$ 为 $AB$ 的中点，$\triangle PMA$ 的外接圆与 $AC$ 的第二个交点为 $N$. 点 $P$ 关于 $BC$ 中点的对称点为点 $Q$. 过点 $B$ 作 $QN$ 的平行线，和直线 $PN$ 交于点 $D$，过点 $P$ 作 $DM$ 的平行线，和 $\triangle PMB$ 的外接圆交于另一点 $E$. 求证：$PM$、$BE$、$AC$ 三线共点.

4. 在 $10\times 10$ 的国际象棋盘上，最多可以放置多少个马，使得棋盘上的每一格至多能被一个马攻击到?
   **注：** 国际象棋中的马每步棋先横走或直走一格，然后再往外斜走一格；或者先斜走一格，最后再往外横走或竖走一格（即走“日”字）. 可以越子，没有中国象棋中的“蹩马腿”限制.

## 第二天

1. Silverio 在黑板上写下一个由字母 A 和 G 组成的有限序列. 然后，他执行以下操作：如果他发现至少出现一个字符串“AG”，他就会随机选择其中一个，并将其替换为“GAAA”. Silverio 反复执行此操作，直到黑板上不再有“AG”字符串. 求证：对于任意的初始序列，Silverio 将在有限次操作后停止.

2. 求所有函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x$，$y\in\mathbb{R}$，都有

$$f(2f(x))=f(x-f(y))+f(x)+y.$$

3. 称一个由正整数组成的集合是好的，如果能将其划分为两个不交的子集 $F$ 和 $T$，每个子集中至少有 2 个元素，且子集 $F$ 中的元素为连续的斐波那契数，子集 $T$ 中的元素为连续的三角形数. 求所有正整数 $n$，使得一个包含了 $n$ 除自身外所有约数的集合是好的.

4. 设 $\mathcal{S}$ 为平面上所有点组成的集合. 求所有函数 $f\colon \mathcal{S}\to\mathbb{R}$，使得对任意非退化的 $\triangle ABC$ 及其垂心 $H$，若 $f(A)\le f(B)\le f(C)$，则

$$f(A)+f(C)=f(B)+f(H).$$