2019 年高联数论题的通项公式做法

2026-05-27　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e67ae6c21509c7f9

今天看到飞哥新书里对 2019 年高联二试数论题的评注如下：

这表明 $a^2+b^2+c^2=15d^2$ 有 $d\neq 0$ 的整数解，由齐次性不妨设 a,b,c,d 互质，则

$$a^2+b^2+c^2+d^2=16d^2\equiv 0(\mathrm{mod}\ 8),$$

由完全平方数模 8 余 0,1,4 可知，a,b,c,d 均为偶数，与 a,b,c,d 互质矛盾！所以假设不成立，$n=4$ 不可能.

综上所述，n 的最小可能值为 5.

例 31　(2019 高联二试)设 m 为整数，$|m|>2$，整数数列$\{a_n\}$满足：a_1,a_2 不全为 0，且对任意正整数 n，均有 $a_{n+2}=a_{n+1}-ma_n$. 证明：若存在整数 $r,s(r>s\geqslant 2)$，使得 $a_r=a_s=a_1$，则 $r-s\geqslant|m|$.

点拨　线性递推数列的通项公式在数论问题中有时无用，应考虑取模等数论手段.

【解析】　只需证 $|m\parallel r-s$. 不妨设 $(a_1,a_2)=1$.

由 $a_{n+2}=a_{n+1}-ma_n$ 知 $a_2\equiv a_3\equiv\cdots\equiv a_s\equiv\cdots\equiv a_r\equiv\cdots(\mathrm{mod}\ |m|)$，又 $a_r=a_s=a_1$，所以对任意正整数 n，$a_n\equiv a_1(\mathrm{mod}\ |m|)$.

特别地，$a_2\equiv a_1(\mathrm{mod}\ |m|)$，结合 $(a_1,a_2)=1$ 得 $(a_1,m)=1$.

由 $r>s\geqslant 2$，$a_r=a_s$，得

$$\begin{aligned}0=a_r-a_s&=(a_r-a_{r-1})+(a_{r-1}-a_{r-2})+\cdots+(a_{s+1}-a_s)\\&=-m(a_{r-2}+a_{r-3}+\cdots+a_{s-1}),\end{aligned}$$

所以 $a_{r-2}+a_{r-3}+\cdots+a_{s-1}=0$，所以 $0=a_{r-2}+a_{r-3}+\cdots+a_{s-1}\equiv(r-s)\cdot a_1(\mathrm{mod}\ |m|)$.

由 $(a_1,m)=1$，得 $|m\parallel r-s$.

例 32　(2002 第 43 届 IMO 预选题)已知正整数 $m,n\geqslant 2$，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是整数，且其中任何一个都不是 m^{n-1} 的倍数. 证明：存在不全为零的整数 $e_1,e_2,\cdots,e_n$，使 $e_1a_1+e_2a_2+\cdots+e_na_n$ 是 m^n 的倍数. 其中，对于所有的 $i=1,2,\cdots,n$，$|e_i|<m$.

【解析】　设 B 是所有 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 构成的集合，其中所有 b_i 满足 $0\leqslant b_i<m$.

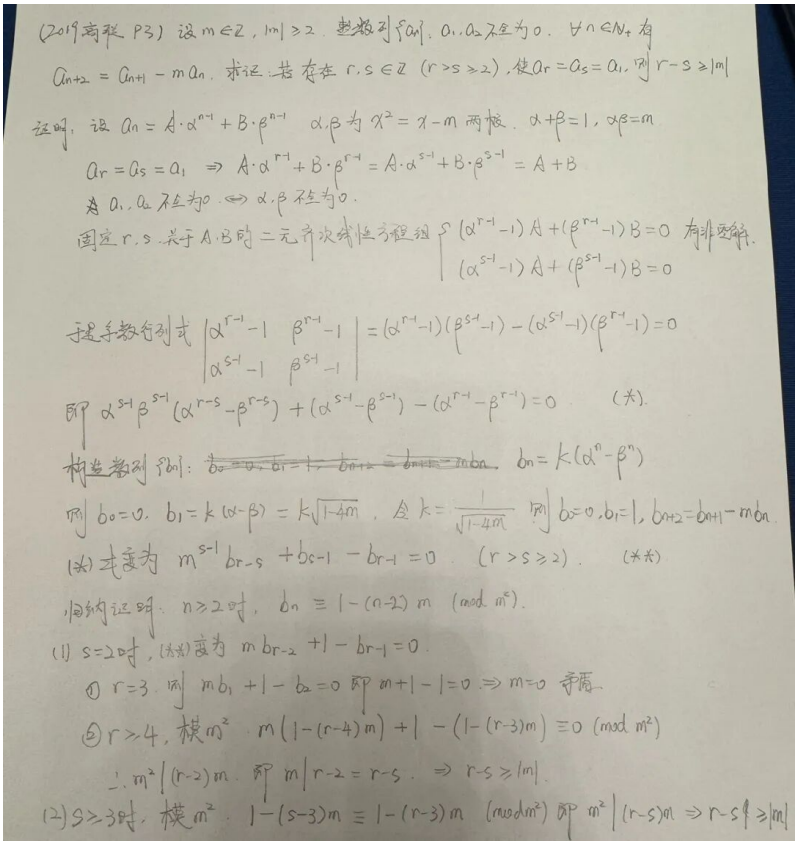
对于 $b\in B$，令 $f(b)=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n$.

若所有的 $f(b)$ 均模 m^n 不同余，由于 $|B|=m^n$，则 $f(b)$ 恰构成一个模 m^n 的完系.

考虑多项式

$$F(x)=\sum_{b\in B}x^{f(b)},$$

事实上，对于本题，求出通项公式并非无用，甚至是我的第一想法，个人认为相当自然。以下为联赛当天我用酒店的纸笔写的解答，整体用时约 20 分钟。



(2019高联 P3) 设 $m\in\mathbb{Z}$, $|m|\geq 2$. 数列 $\{a_n\}$, a_1, a_2 不全为 0. $\forall n\in\mathbb{N}_+$ 有 $a_{n+2}=a_{n+1}-ma_n$. 求证: 若存在 $r,s\in\mathbb{Z}$ $(r>s\geq 2)$, 使 $a_r=a_s=a_1$, 则 $r-s\geq|m|$

证明: 设 $a_n=A\cdot\alpha^{n-1}+B\cdot\beta^{n-1}$ α,β 为 $x^2=x-m$ 两根. $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=m$

$a_r=a_s=a_1 \Rightarrow A\cdot\alpha^{r-1}+B\cdot\beta^{r-1}=A\cdot\alpha^{s-1}+B\cdot\beta^{s-1}=A+B$

又 a_1, a_2 不全为 0 $\Leftrightarrow$ α,β 不全为 0.

固定 r,s 关于 A,B 的二元齐次线性方程组 $\begin{cases}(\alpha^{r-1}-1)A+(\beta^{r-1}-1)B=0\\(\alpha^{s-1}-1)A+(\beta^{s-1}-1)B=0\end{cases}$ 有非零解.

于是系数行列式 $\begin{vmatrix}\alpha^{r-1}-1 & \beta^{r-1}-1\\ \alpha^{s-1}-1 & \beta^{s-1}-1\end{vmatrix}=(\alpha^{r-1}-1)(\beta^{s-1}-1)-(\alpha^{s-1}-1)(\beta^{r-1}-1)=0$

即 $\alpha^{s-1}\beta^{s-1}(\alpha^{r-s}-\beta^{r-s})+(\alpha^{s-1}-\beta^{s-1})-(\alpha^{r-1}-\beta^{r-1})=0$ (*).

构造数列 $\{b_n\}$: ~~$b_0=0, b_1=1, b_{n+2}=b_{n+1}-mb_n$~~. $b_n=k(\alpha^n-\beta^n)$

则 $b_0=0$, $b_1=k(\alpha-\beta)=k\sqrt{1-4m}$, 令 $k=\frac{1}{\sqrt{1-4m}}$ 则 $b_0=0, b_1=1, b_{n+2}=b_{n+1}-mb_n$.

(*) 式变为 $m^{s-1}b_{r-s}+b_{s-1}-b_{r-1}=0$ $(r>s\geq 2)$. (**)

归纳证明: $n\geq 2$ 时, $b_n\equiv 1-(n-2)m \pmod{m^2}$.

(1) $s=2$ 时, (**) 变为 $mb_{r-2}+1-b_{r-1}=0$.

① $r=3$ 则 $mb_1+1-b_2=0$ 即 $m+1-1=0\Rightarrow m=0$ 矛盾.

② $r\geq 4$, 模 m^2 $m(1-(r-4)m)+1-(1-(r-3)m)\equiv 0 \pmod{m^2}$

$\therefore m^2\mid(r-2)m$. 即 $m\mid r-2=r-s$. $\Rightarrow r-s\geq|m|$.

(2) $s\geq 3$ 时, 模 m^2 $1-(s-3)m\equiv 1-(r-3)m \pmod{m^2}$ 即 $m^2\mid(r-s)m\Rightarrow r-s\geq|m|$