2022 年地中海数学奥林匹克

2022-09-23　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e736d5e34501fbe0

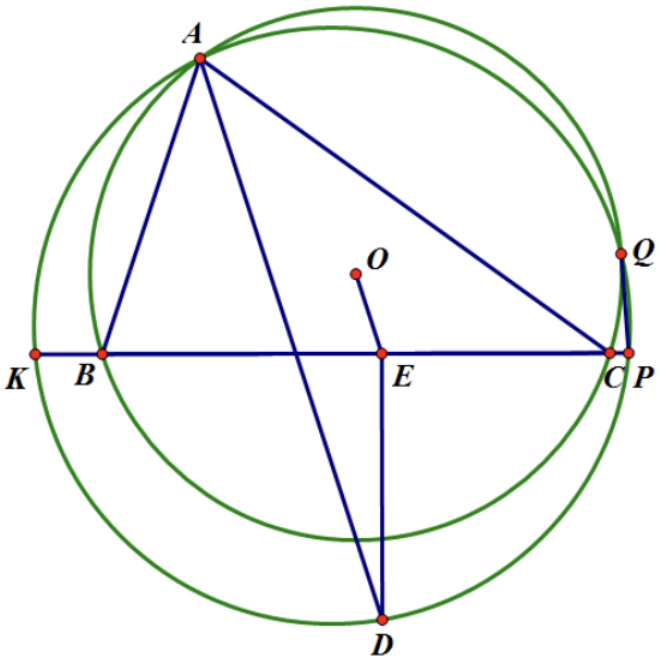
1. 设 $S=\{1,2,\cdots,999\}$. 求最小的整数 m，使得存在 m 个双面的卡片 C_1，C_2，$\cdots$，C_m，且具有如下性质：
   (1) 每张卡片 C_i 的一面写有 S 中的一个数字，另一面写有 S 中的另一个数字；
   (2) 对任意 x，$y\in S$，且 $x\neq y$，能够选出一张卡片 C_i，其某一面写有 x，和另一张卡片 C_j $(i\neq j)$，其某一面写有 y.

2. (1) 是否存在两个十进制的数码 a 和 b，使得每个形如 $ab222\cdots231$ 的十进制数都能被 73 整除？
   (2) 是否存在两个十进制的数码 c 和 d，使得每个形如 $cd222\cdots231$ 的十进制数都能被 79 整除？

3. 设 a，b，c，d 为正实数，求证：

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{(b+c+d)^3}{b^3+c^3+d^3}+\frac{(c+d+a)^4}{c^4+d^4+a^4}+\frac{(d+a+b)^5}{d^5+a^5+b^5}\leq 120$$

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC$，O 为外心. 过 O 作 $\angle BAC$ 的平分线的平行线与 BC 交于点 E，过 E 作 BC 的垂线与 $\angle BAC$ 的平分线交于点 D. 延长 EB 至 K，使得 $EK=KA$，设 $\triangle ADK$ 的外接圆与 BC 的延长线交于点 P、与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 Q. 求证：PQ 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切.



译者注：本题为 2018 年中国数学奥林匹克第一天第三题