2024 年罗马尼亚国家数学奥林匹克（9-12 年级组）

2024-04-06　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e863174a3f8a713b

之前翻译了地区级的题目：2024 年罗马尼亚数学奥林匹克（地区级）——中文翻译

罗马尼亚的竞赛题从十一年级开始就以高等内容为主了，不过题目还是很有趣的。还有五到八年级的题目 AoPS 上暂时没出，想看的可以留言，等出了之后我再翻译。

2024 年罗马尼亚国家数学奥林匹克

程国根译

九年级组

1. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 在边 BC 上，且 D 在 B, E 之间．点 R 在线段 AE 上，DR 交 AC 于点 P，CR 交 AB 于点 Q，若 PQ 平行于 BC，则称点 R 是**特别的**．点 R' 在线段 AD 上，BR' 交 AC 于点 P'，ER' 交 AB 于点 Q'，若 $P'Q'$ 平行于 BC，则称点 R' 是**特别的**．

(1) 若线段 AE 上存在一个**特别的**点，求证：线段 AE 上的所有点都是**特别的**．

(2) 若线段 AD, AE 上都存在一个**特别的**点，求证：$BD = CE = \varphi \cdot DE$，其中 $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 为黄金分割比．

2. 实数 a, b 在区间 $(0, 1)$ 内，满足对任意非负整数 n，都有 $\{na\} \geq \{nb\}$．求证：$a = b$．

注：$\{x\}$ 表示 x 的小数部分．

3. 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对任意实数 x, y，都有

$$(f(x) - y)f(x + f(y)) = f(x^2) - yf(y).$$

4. a 为一个给定的正整数．数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n = \dfrac{1}{1+na}$，$n \in \mathbb{N}_+$．求证：对任意整数 $k \geq 3$，存在正整数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$，使得 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}$ 为一个等差数列中的连续若干项．

1

2024 年罗马尼亚国家数学奥林匹克

程国根译

十年级组

1. 求方程的实数解：

$$3^{\log_5(5x-10)}-2=5^{-1+\log_3 x}.$$

2. 非退化五边形 $ABCDE$ 满足 $AB=BC=CD$，且五边形的中心同时也为外接圆圆心．求证：五边形 $ABCDE$ 为正五边形．

注：五边形的中心是五边形平面上的一点，其位置向量等于各顶点位置向量的平均值．

3. 设正整数 $n\geq 2$，函数 $f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$ 满足对任意 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，都有 $f(k)\leq f(k+1)\leq f(k)+1$，记 $\mathcal{F}$ 为所有满足条件的 f 的集合．

(1) 求 $\mathcal{F}$ 的元素个数．

(2) 求 $\mathcal{F}$ 中所有函数的不动点个数之和．

4. 整数 $n\geq 3$，集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，$\mathcal{F}$ 为所有从 S 到 S 的函数组成的集合．称 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{H}\subset\mathcal{F}$ 的**生成集合**，如果 $\mathcal{H}$ 中的任意函数都能表示为 $\mathcal{G}$ 中若干个函数的复合．

(1) 设函数 $a:S\to S$ 满足 $a(n-1)=n$，$a(n)=n-1$，且对任意 $k\in S\setminus\{n-1,n\}$，都有 $a(k)=k$．函数 $b:S\to S$ 满足 $b(n)=1$，且对任意 $k\in S\setminus\{n\}$，都有 $b(k)=k+1$．求证：$\{a,b\}$ 为 $\mathcal{F}$ 中所有双射函数组成的集合 $\mathcal{B}$ 的**生成集合**．

(2) 求证：$\mathcal{F}$ 的生成集合中至少有 3 个元素．

2024 年罗马尼亚国家数学奥林匹克

程国根译

十一年级组

1. 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为开区间，函数 $f : I \to \mathbb{R}$ 二阶可导，且对任意 $x \in I$，都有 $f(x)f''(x) = 0$．求证：对任意 $x \in I$，都有 $f''(x) = 0$．

2. 设 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ 是一个可逆矩阵．

(1) 求证：AA^T 的特征值为正实数．

(2) 若存在两个不同的正整数 p 和 q，使得 $(AA^T)^p = (A^TA)^q$．求证：$A^T = A^{-1}$．

3. 设 $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$．定义函数 $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ 如下：对任意 $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$，$f(Z) = AZ + B\bar{Z}$，矩阵 $\bar{Z}$ 中的每一项与 Z 中对应的项互为共轭．求证：下列命题是等价的：

(1) f 是单射．

(2) f 是满射．

(3) $A + B$ 和 $A - B$ 互为转置．

4. 设函数 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 满足对任意 $x \in \mathbb{R}$，都有 $g(x) = 2f(x) + f(x^2)$．

(1) 求证：若 f 在原点的一个邻域有界，且 g 在原点连续，则 f 在原点连续．

(2) 构造一个在原点不连续的函数 f，使得 g 在原点是连续的．

2024 年罗马尼亚国家数学奥林匹克

程国根译

十二年级组

1. 设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足对任意实数 x，都有 $f(x)+\sin(f(x))\geq x$．求证：

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x\geq\frac{\pi^2}{2}-2.$$

2. 设 $(\mathbb{K},+,\cdot)$ 为除环，且对任意 $x,y\in\mathbb{K}$，都有 $x^2y=yx^2$．求证：$(\mathbb{K},+,\cdot)$ 是交换环．

3. 设连续函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 满足 $f(1)=0$．求证：极限

$$\lim_{t\to1-}\left(\frac{1}{1-t}\int_0^1 x(f(tx)-f(x))\mathrm{d}x\right)$$

存在，并求极限值．

4. 设 $\mathbb{L}$ 为有 q 个元素的有限域．求证：

(1) 若 $q\equiv3\pmod4$，正整数 $n\geq2$ 能被 $q-1$ 整除，则对任意 $x\in\mathbb{L}^\times$，$x^n=(x^2+1)^n$．

(2) 若存在正整数 $n\geq2$，使得对任意 $x\in\mathbb{L}^\times$，$x^n=(x^2+1)^n$，则 $q\equiv3\pmod4$，且 $q-1$ 整除 n．

2024 年罗马尼亚国家数学奥林匹克

程国根译

九年级组

1. 在 $\triangle ABC$中，点 D,E在边 BC上，且 D在 B,E之间．点 R在线段 AE上，DR交 AC于点 P，CR交 AB于点 Q，若 PQ平行于 BC，则称点 R是**特别的**．点 R'在线段 AD上，BR'交 AC于点 P'，ER'交 AB于点 Q'，若 $P'Q'$平行于 BC，则称点 R'是**特别的**．

   1. 若线段 AE上存在一个**特别的**点，求证：线段 AE上的所有点都是**特别的**．
   2. 若线段 AD,AE上都存在一个**特别的**点，求证：$BD=CE=\varphi\cdot DE$，其中 $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$为黄金分割比．

2. 实数 a,b在区间 $(0,1)$内，满足对任意非负整数 n，都有 $\{na\}\ge\{nb\}$．求证：$

a=b$. **注：$\{x\}$表示 x的小数部分.**

3. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意实数 x,y，都有 $$(f(x)-y)f(x+f(y))=f(x^2)-yf(y).$$

4. a为一个给定的正整数. 数列 $\{x_{n}\}$的通项公式为 $x_{n}=\frac{1}{1+na}$，$n\in\mathbb{N}_{+}$. 求证：对任意整数 $k\ge 3$，存在正整数 $n_{1}<n_{2}<\cdots<n_{k}$，使得 $x_{n_{1}},x_{n_{2}},\cdots,x_{n_{k}}$为一个等差数列中的连续若干项.

2024 年罗马尼亚国家数学奥林匹克

程国根译

十年级组

1. 求方程的实数解：$$3^{\log_5(5x-10)}-2=5^{-1+\log_3x}.$$

2. 非退化五边形 $ABCDE$满足 $AB=BC=CD$，且五边形的中心同时也为外接圆圆心. 求证：五边形 $ABCDE$为正五边形. **注：五边形的中心是五边形平面上的一点，其位置向量等于各顶点位置向量的平均值.**

3. 设正整数 $n\ge 2$，函数 $f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$满足对任意 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，都有 $f(k)\le f(k+1)\le f(k)+1$，记 $\mathcal{F}$为所有满足条件的 f的集合.

   1. 求 $\mathcal{F}$的元素个数.
   2. 求 $\mathcal{F}$中所有函数的不动点个数之和.

4. 整数 $n\ge 3$，集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，$\mathcal{F}$为所有从 S到 S的函数组成的集合. 称 $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$为 $\mathcal{H}\subset\mathcal{F}$的**生成集合**，如果 $\mathcal{H}$中的任意函数都能表示为 $\mathcal{G}$中若干个函数的复合.

   1. 设函数 $a:S\to S$满足 $a(n-1)=n$，$a(n)=n-1$，且对任意 $k\in S\setminus\{n-1,n\}$，都有 $a(k)=k$. 函数 $b:S\to S$满足 $b(n)=1$，且对任意 $k\in S\setminus\{n\}$，都有 $b(k)=k+1$. 求证：$\{a,b\}$为 $\mathcal{F}$中所有双射函数组成的集合 $\mathcal{B}$的**生成集合**.
   2. 求证：$\mathcal{F}$的生成集合中至少有 3个元素.

2024 年罗马尼亚国家数学奥林匹克

程国根译

十一年级组

1. 设 $I\subset\mathbb{R}$为开区间，函数 $f:I\to\mathbb{R}$二阶可导，且对任意 $x\in I$，都有 $f(x)f''(x)=0$. 求证：对任意 $x\in I$，都有 $f''(x)=0$.

2. 设 $A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$是一个可逆矩阵.

1. 求证：AA^{T}的特征值为正实数.
2. 若存在两个不同的正整数 p和 q，使得 $(AA^{T})^{p}=(A^{T}A)^{q}$. 求证：$A^{T}=A^{-1}$.

3. 设 $A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 定义函数 $f:\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$如下：对任意 $Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$，$f(Z)=AZ+B\bar{Z}$，矩阵 $\bar{Z}$中的每一项与 Z中对应的项互为共轭. 求证：下列命题是等价的：

1. f是单射.
2. f是满射.
3. $A+B$和 $A-B$互为转置.

4. 设函数 $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足对任意 $x\in\mathbb{R}$,都有 $g(x)=2f(x)+f(x^2)$.

1. 求证：若 f在原点的一个邻域有界，且 g在原点连续，则 f在原点连续.
2. 构造一个在原点不连续的函数 f，使得 g在原点是连续的.

2024 年罗马尼亚国家数学奥林匹克

程国根译

十二年级组

1. 设连续函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足对任意实数 x，都有 $f(x)+\sin(f(x))\ge x$. 求证：$$\int_0^{\pi} f(x) \mathrm{d}x \ge \frac{\pi^2}{2}-2.$$

2. 设 $(\mathbb{K},+, \cdot)$为除环,且对任意 $x,y\in\mathbb{K}$,都有 $x^{2}y=yx^{2}$. 求证：$(\mathbb{K},+, \cdot)$是交换环.

3. 设连续函数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$满足 $f(1)=0$. 求证：极限 $$\lim_{t\to 1_{-}} \left(\frac{1}{1-t} \int_0^1x(f(tx)-f(x)) \mathrm{d}x\right)$$存在，并求极限值.

4. 设 $\mathbb{L}$为有 q个元素的有限域. 求证：

1. 若 $q\equiv 3\pmod{4}$，正整数 $n\ge 2$能被 $q-1$整除，则对任意 $x\in\mathbb{L}^{\times}$，$x^{n}=(x^{2}+1)^{n}$.
2. 若存在正整数 $n\ge 2$，使得对任意 $x\in\mathbb{L}^{\times}$，$x^{n}=(x^{2}+1)^{n}$，则 $q\equiv 3\pmod{4}$，且 $q-1$整除 n.

解答（PDF 中已展开）

\section*{2024年罗马尼亚国家数学奥林匹克}\subsection*{程国根译}\section*{九年级组}\setcounter{ex}{0}\ex 在$\triangle ABC$中，点D,E在边BC上，且D在B,E之间．点R在线段AE上，DR交AC于点P，CR交AB于点Q，若PQ平行于BC，则称点R是\textbf{特别的}．点R'在线段AD上，BR'交AC于点P'，ER'交AB于点Q'，若$P'Q'$平行于BC，则称点R'是\textbf{特别的}．\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 若线段AE上存在一个\textbf{特别的}点，求证：线段AE上的所有点都是\textbf{特别的}．\item 若线段AD,AE上都存在一个\textbf{特别的}点，求证：$BD=CE=\varphi\cdot DE$，其中$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$为黄金分割比．\end{enumerate}\vfill\ex 实数a,b在区间$(0,1)$内，满足对任意非负整数n，都有$\{na\}\ge\{nb\}$．求证：$a=b$．

\textbf{注：$\{x\}$表示x的小数部分．}\vfill\ex 求所有函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意实数$x,y$，都有$$(f(x)-y)f(x+f(y))=f(x^2)-yf(y).$$\vfill\ex a为一个给定的正整数．数列$\{x_{n}\}$的通项公式为$x_{n}=\frac{1}{1+na}$，$n\in\mathbb{N}_{+}$．求证：对任意整数$k\ge 3$，存在正整数$n_{1}<n_{2}<\cdots<n_{k}$，使得$x_{n_{1}},x_{n_{2}},\cdots,x_{n_{k}}$为一个等差数列中的连续若干项．

\vfill\newpage\section*{2024年罗马尼亚国家数学奥林匹克}\subsection*{程国根译}\section*{十年级组}\setcounter{ex}{0}\ex 求方程的实数解：$$3^{\log_5(5x-10)}-2=5^{-1+\log_3x}.$$\vfill\ex 非退化五边形$ABCDE$满足$AB=BC=CD$，且五边形的中心同时也为外接圆圆心．求证：五边形$ABCDE$为正五边形．

\textbf{注：五边形的中心是五边形平面上的一点，其位置向量等于各顶点位置向量的平均值．}\vfill\ex 设正整数$n\ge 2$，函数$f:\{1,2,\cdots,n\}\to\{1,2,\cdots,n\}$满足对任意$k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，都有$f(k)\le f(k+1)\le f(k)+1$，记$\mathcal{F}$为所有满足条件的$f$的集合．\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求$\mathcal{F}$的元素个数．\item 求$\mathcal{F}$中所有函数的不动点个数之和．\end{enumerate}\vfill\ex 整数$n\ge 3$，集合$S=\{1,2,\cdots,n\}$，$\mathcal{F}$为所有从S到S的函数组成的集合．称$\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$为$\mathcal{H}\subset\mathcal{F}$的\textbf{生成集合}，如果$\mathcal{H}$中的任意函数都能表示为$\mathcal{G}$中若干个函数的复合．\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 设函数$a:S\to S$满足$a(n-1)=n$，$a(n)=n-1$，且对任意$k\in S\setminus \{n-1,n\}$，都有$a(k)=k$．函数$b:S\to S$满足$b(n)=1$，且对任意$k\in S\setminus \{n\}$，都有$b(k)=k+1$．求证：$\{a,b\}$为$\mathcal{F}$中所有双射函数组成的集合$\mathcal{B}$的\textbf{生成集合}．\item 求证：$\mathcal{F}$的生成集合中至少有$3$个元素．\end{enumerate}\vfill\newpage\section*{2024年罗马尼亚国家数学奥林匹克}\subsection*{程国根译}\section*{十一年级组}\setcounter{ex}{0}\ex 设$I\subset \mathbb{R}$为开区间，函数$f:I\to\mathbb{R}$二阶可导，且对任意$x\in I$，都有$f(x)f''(x)=0$．求证：对任意$x\in I$，都有$f''(x)=0$．\vfill\ex 设$A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$是一个可逆矩阵．\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求证：AA^{T}的特征值为正实数．\item 若存在两个不同的正整数p和q，使得$(AA^{T})^{p}=(A^{T}A)^{q}$．求证：$A^{T}=A^{-1}$．\end{enumerate}\vfill\ex 设$A,B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$．定义函数$f:\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$如下：对任意$Z \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$，$f(Z)=AZ+B\bar{Z}$，矩阵$\bar{Z}$中的每一项与$Z$中对应的项互为共轭．求证：下列命题是等价的：\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item f是单射．\item f是满射．\item $A+B$和$A-B$互为转置．\end{enumerate}\vfill\ex 设函数$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足对任意$x\in\mathbb{R}$，都有$g(x)=2f(x)+f(x^2)$．\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求证：若f在原点的一个邻域有界，且g在原点连续，则f在原点连续．\item 构造一个在原点不连续的函数f，使得g在原点是连续的．\end{enumerate}\vfill\newpage\section*{2024年罗马尼亚国家数学奥林匹克}\subsection*{程国根译}\section*{十二年级组}\setcounter{ex}{0}\ex 设连续函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，满足对任意实数$x$，都有$f(x)+\sin(f(x))\ge x$．求证：$$\int_0^{\pi} f(x) \mathrm{d}x \ge \frac{\pi^2}{2}-2.$$\vfill\ex 设$(\mathbb{K},+, \cdot)$为除环，且对任意$x,y\in\mathbb{K}$，都有$x^{2}y=yx^{2}$．求证：$(\mathbb{K},+, \cdot)$是交换环．\vfill\ex 设连续函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}$满足$f(1)=0$．求证：极限$$\lim_{t\to 1_{-}} \left(\frac{1}{1-t} \int_0^1x(f(tx)-f(x)) \mathrm{d}x\right)$$存在，并求极限值．\vfill\ex 设$\mathbb{L}$为有q个元素的有限域．求证：\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 若$q\equiv 3\pmod{4}$，正整数$n\ge 2$能被$q-1$整除，则对任意$x\in\mathbb{L}^{\times}$，$x^{n}=(x^{2}+1)^{n}$．\item 若存在正整数$n\ge 2$，使得对任意$x\in\mathbb{L}^{\times}$，$x^{n}=(x^{2}+1)^{n}$，则$q\equiv 3\pmod{4}$，且$q-1$整除n．\end{enumerate}\vfill