2024 年孟加拉过数学奥林匹克

2024-04-03　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e88110c6f3da0ef7

昨天发的版本有几处错误，修正如下。感谢留言指出的各位读者！

2024 年孟加拉国数学奥林匹克（初中组）

程国根译

1. 求所有非负整数 x,y，使得

$$x^3y+x+y=xy+2xy^2.$$

2. 在圆内接四边形 $ABCD$ 中，对角线交点为 E．F,G 分别在弦 AC,BD 上，满足 $AF=BE$，$DG=CE$．求证：B,G,F,C 四点共圆．

3. 实数 a,b 满足

$$\frac{a}{a^2-5}=\frac{b}{5-b^2}=\frac{ab}{a^2b^2-5},$$

且 $a+b\neq 0$，求 a^4+b^4．

4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{11}$ 为整数．求证：存在整数 $b_1,b_2,\cdots,b_{11}$，满足条件：

- 对任意 $i\in\{1,2,\cdots,11\}$，$b_i\in\{-1,0,1\}$．
- b_i 不同时为 0．
- $N=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$ 能被 2024 整除．

5. X,Y 在直线 PQ 异侧，满足 $\triangle XPQ$ 和 $\triangle YPQ$ 的外接圆半径相等．I,J 分别为 $\triangle XPQ$ 和 $\triangle YPQ$ 的内心，M 为 PQ 中点．若 I,M,J 三点共线，求证：$XPYQ$ 为平行四边形．

6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2024}$ 为 $1,2,\cdots,2024$ 的一个排列．求下式的最小值：

$$\sum_{i=1}^{2023}\left[(a_i+a_{i+1})\left(\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_{i+1}}\right)+\frac{1}{a_ia_{i+1}}\right].$$

7. 设 $ABCD$ 为正方形．点 E,F 分别在边 AB,BC 上，满足 $BE=BF$．过点 B 作 CE 的垂线，和 CE,AD 分别交于点 G,H．直线 FH,CE 交于点 P，直线 GF,CD 交于点 Q．求证：$DP\perp BQ$．

8. 对平面上一个 n 元点集，如果以其中任意 3 点为顶点都能构成一个等腰三角形，则称它是波色 n 点集．求所有正整数 n，使得存在波色 n 点集．

9. 求所有正整数组 (k,m)，使得对任意正整数 n，都有

$$n!\mid(n+m)(n+2m)\cdots(n+km).$$

1

2024 年孟加拉国数学奥林匹克（高中组）

程国根译

1. 求所有素数 p, q，使得 $p^3 - 3^q = 10$.

2. 同初中组第 7 题

3. 同初中组第 6 题

4. 同初中组第 4 题

5. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，点 P 满足 $PI \perp BC$，$PA \parallel BC$. 平行于 BC 且和 $\triangle ABC$ 内切圆相切的一条直线与 AB, AC 分别交于点 Q, R. 求证：$\angle BPQ = \angle CPR$.

6. 求所有多项式 $P(x)$，满足存在数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得对任意正整数 m, n，都有

$$a_m + a_n = P(mn).$$

7. 求所有函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对任意 $m, n \in \mathbb{N}$，都有

$$f\left(\left\lceil \frac{f(m)}{n} \right\rceil\right) = \left\lceil \frac{m}{f(n)} \right\rceil.$$

8. 设 k 为正整数. 求证：存在无穷多个正整数 n，使得 $\dfrac{n^n - 1}{n - 1}$ 至少有 k 个不同的素因子.

9. 在 $\triangle ABC$ 中，M 为 BC 的中点. BC 的中垂线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 K, L 两点（点 K 和点 A 在 BC 异侧）. 过点 L, M 的一个圆和 AK 交于 P, Q 两点（点 P 在线段 AQ 上）. 设 LQ 和 $\triangle KMQ$ 的另一个交点为 R. 求证：$BPCR$ 四点共圆.

10. Juty 和 Azgor 在一个 $(2n+1) \times (2n+1)$ 的棋盘上进行以下对局，Juty 先下. 最初所有的单元格都被涂成白色. 轮到 Juty 时，她给一个白色单元格涂上绿色，轮到 Azgor 时，他给一个白色单元格涂上红色. 当他们给棋盘上的所有单元格都涂上颜色后，游戏结束. 如果所有的绿色单元格都是相连的，即任意两个绿色单元格之间至少有一条相邻的绿色单元格链（如果两个单元格至少有一个角是共用的，我们就称它们为相邻单元格），那么 Juty 获胜，否则 Azgor 获胜. 确定哪一方有必胜策略.

2024 年孟加拉国数学奥林匹克（初中组）

程国根译

1. 求所有非负整数 x,y，使得 $$x^3y+x+y=xy+2xy^2.$$

2. 在圆内接四边形 $ABCD$中，对角线交点为 E. F,G分别在弦 AC,BD上，满足 $AF=BE$，$DG=CE$. 求证：B,G,F,C四点共圆.

3. 实数 a,b满足 $$\frac{a}{a^2-5} = \frac{b}{5-b^2} = \frac{ab}{a^2b^2-5},$$且 $a+b\neq 0$，求 a^4+b^4.

4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{11}$为整数. 求证：存在整数 $b_1,b_2,\cdots,b_{11}$，满足条件：

- 对任意 $i\in\{1,2,\cdots,11\}$，$b_i\in\{-1,0,1\}$.
- b_i不同时为 0.
- $N=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$能被 2024整除.

5. X,Y在直线 PQ异侧，满足 $\triangle XPQ$和 $\triangle YPQ$的外接圆半径相等．I,J分别为 $\triangle XPQ$和 $\triangle YPQ$的内心，M为 PQ中点．若 I,M,J三点共线，求证：$XPYQ$为平行四边形．

6. 设 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{2024}$为 $1,2,\cdots,2024$的一个排列．求下式的最小值：$$\sum_{i=1}^{2023}\left[(a_i+a_{i+1})\left(\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_{i+1}}\right)+\frac{1}{a_ia_{i+1}}\right].$$

7. 设 $ABCD$为正方形．点 E,F分别在边 AB,BC上，满足 $BE=BF$．过点 B作 CE的垂线，和 CE,AD分别交于点 G,H．直线 FH,CE交于点 P，直线 GF,CD交于点 Q．求证：$DP\perp BQ$．

8. 对平面上一个 n元点集，如果以其中任意 3点为顶点都能构成一个等腰三角形，则称它是波色 n点集．求所有正整数 n，使得存在波色 n点集．

9. 求所有正整数组 (k,m)，使得对任意正整数 n，都有 $$n!\mid (n+m)(n+2m)\cdots(n+km).$$

2024 年孟加拉国数学奥林匹克（高中组）

程国根译

1. 求所有素数 p,q，使得 $p^{3}-3^{q}=10$．

2. 同初中组第 7 题

3. 同初中组第 6 题

4. 同初中组第 4 题

5. 设 $\triangle ABC$的内心为 I，点 P满足 $PI\perp BC$，$PA\parallel BC$．平行于 BC且和 $\triangle ABC$内切圆相切的一条直线与 AB,AC分别交于点 Q,R．求证：$\angle BPQ=\angle CPR$．

6. 求所有多项式 $P(x)$，满足存在数列 $a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$，使得对任意正整数 m,n，都有 $$a_{m}+a_{n}=P(mn).$$

7. 求所有函数 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意 $m,n\in\mathbb{N}$，都有 $$f\left(\left \lceil \frac{f(m)}{n} \right \rceil\right)=\left \lceil \frac{m}{f(n)} \right \rceil.$$

8. 设 k为正整数．求证：存在无穷多个正整数 n，使得 $\frac{n^{n}-1}{n-1}$至少有 k个不同的素因子．

9. 在 $\triangle ABC$中，M为 BC的中点．BC的中垂线交 $\triangle ABC$的外接圆于 K,L两点（点 K和点 A在 BC异侧）．过点 L,M的一个圆和 AK交于 P,Q两点（点 P在线段 AQ上）．设 LQ和 $\triangle KMQ$的另一个交点为 R．求证：$BPCR$四点共圆．

10. Juty 和 Azgor 在一个 $(2n+1) \times(2n+1)$的棋盘上进行以下对局，Juty 先下．最初所有的单元格都被涂成白色．轮到 Juty 时，她给一个白色单元格涂上绿色，轮到 Azgor 时，他给一

个白色单元格涂上红色．当他们给棋盘上的所有单元格都涂上颜色后，游戏结束．如果所有的绿色单元格都是相连的，即任意两个绿色单元格之间至少有一条相邻的绿色单元格链（如果两个单元格至少有一个角是共用的，我们就称它们为相邻单元格），那么 Juty 获胜，否则 Azgor 获胜．确定哪一方有必胜策略．

解答（PDF 中已展开）

\section*{2024年孟加拉国数学奥林匹克（初中组）}\subsection*{程国根译}\ex 求所有非负整数x,y，
↪ 使得$$x^3y+x+y=xy+2xy^2.$$\vfill\ex 在圆内接四边形$ABCD$中，对角线交点为E．F,G分别在弦AC,BD上，
↪ 满足$AF=BE$，$DG=CE$．求证：B,G,F,C四点共圆．\vfill\ex 实数a,b满足$$\frac{a}{a^2-5} = \frac{b}{5-b^2} =
↪ \frac{ab}{a^2b^2-5},$$且$a+b\neq 0$，求$a^{4}+b^{4}$．\vfill\ex 设$a_{1},a_{2},\cdots,a_{11}$为整数．求证：
↪ 存在整数$b_{1},b_{2},\cdots,b_{11}$，满足条件：\begin{itemize}\item 对任意$i\in\{1,2,\cdots,11\}$，$b_{i}\in\{-1,0,1\}$．\item
↪ b_{i}不同时为0．\item $N=a_{1}b_{1}+a_{2}b_{2}+\cdots+a_{n}b_{n}$能被$2024$整除．\end{itemize}\vfill\ex
↪ X,Y在直线PQ异侧，满足$\triangle XPQ$和$\triangle YPQ$的外接圆半径相等．I,J分别为$\triangle XPQ$和$\triangle
↪ YPQ$的内心，$M$为$PQ$中点．若$I,M,J$三点共线，求证：$XPYQ$为平行四边形．\vfill\ex
↪ 设$a_{1},a_{2},\cdots,a_{2024}$为$1,2,\cdots,2024$的一个排列．求下式的最小值：$$\sum_{i=1} ^{2023}
↪ \left[(a_i+a_{i+1})\left(\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_{i+1}}\right)+\frac{1}{a_ia_{i+1}}\right].$$\vfill\ex 设$ABCD$为正方形．
↪ 点E,F分别在边AB,BC上，满足$BE=BF$．过点B作CE的垂线，和CE,AD分别交于点G,H．
↪ 直线FH,CE交于点P，直线GF,CD交于点Q．求证：$DP\perp BQ$．\vfill\ex 对平面上一个n元点集，
↪ 如果以其中任意3点为顶点都能构成一个等腰三角形，则称它是波色n点集．求所有正整数n，使得存在波色n点集．
↪ \vfill\ex 求所有正整数组(k,m)，使得对任意正整数n，都有$$n!\mid
↪ (n+m)(n+2m)\cdots(n+km).$$\vfill\section*{2024年孟加拉国数学奥林匹克（高中组）
↪ }\subsection*{程国根译}\setcounter{ex}{0}\ex 求所有素数p,q，使得$p^{3}-3^{q}=10$．\vfill\ex 同初中组第7题\vfill\ex
↪ 同初中组第6题\vfill\ex 同初中组第4题\vfill\ex 设$\triangle ABC$的内心为I，点P满足$PI\perp BC$，$PA\parallel BC$．
↪ 平行于BC且和$\triangle ABC$内切圆相切的一条直线与AB,AC分别交于点Q,R．求证：$\angle BPQ=\angle CPR$．
↪ \vfill\ex 求所有多项式$P(x)$，满足存在数列$a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}$，使得对任意正整数m,n，
↪ 都有$$a_{m}+a_{n}=P(mn).$$\vfill\ex 求所有函数$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意$m,n\in\mathbb{N}$，
↪ 都有$$f\left(\left \lceil \frac{f(m)}{n} \right \rceil\right)=\left \lceil \frac{m}{f(n)} \right \rceil.$$\vfill\ex 设k为正整数．求证：
↪ 存在无穷多个正整数n，使得$\frac{n^{n}-1}{n-1}$至少有k个不同的素因子．\vfill\ex 在$\triangle ABC$中，
↪ M为BC的中点．BC的中垂线交$\triangle ABC$的外接圆于K,L两点（点K和点A在BC异侧）．
↪ 过点L,M的一个圆和AK交于P,Q两点（点P在线段AQ上）．设LQ和$\triangle KMQ$的另一个交点为R．求证：
↪ $BPCR$四点共圆．\vfill\ex Juty和Azgor在一个$(2n+1) \times(2n+1)$的棋盘上进行以下对局，Juty先下．
↪ 最初所有的单元格都被涂成白色．轮到Juty时，她给一个白色单元格涂上绿色，轮到Azgor时，他给一个白色单元格涂上红色．
↪ 当他们给棋盘上的所有单元格都涂上颜色后，游戏结束．如果所有的绿色单元格都是相连的，
↪ 即任意两个绿色单元格之间至少有一条相邻的绿色单元格链（如果两个单元格至少有一个角是共用的，
↪ 我们就称它们为相邻单元格），那么Juty获胜，否则Azgor获胜．确定哪一方有必胜策略．\vfill

一年一度全球数学爱好者的盛会，就差你了！

