2024 年希腊数学奥林匹克

2024-02-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e94796b73bb1f07b

2024 年希腊数学奥林匹克

程国根 译

1. 设 a,b,c 为实数，满足其中两数之差大于 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 求证：存在整数 x，使得

$$x^2-4(a+b+c)x+12(ab+bc+ca)<0.$$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB<AC<BC$，外接圆为 Γ_1. 圆 Γ_2 的圆心 D 在 Γ_1 的圆周上，且和 BC 相切于点 E，和 AB 相切于点 F. 设 Γ_1 和 Γ_2 交于 K,G 两点，KG 和 EF,CD 分别交于点 M,N. 求证：B,C,N,M 四点共圆.

3. 设正整数 $n\geq 2$，A,B 为两个有限整数集，$|A|\leq n$. C 为集合 $\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$ 的一个子集. 阿喀琉斯在一块黑板上写下满足 $(a,b)\in C$ 的所有不同的差 $a-b$，设这些差一共有 d 个. 他在另一块黑板上写下满足 $(k,l),(k,m)\in C$ 的所有的三元数组 (k,l,m)，一共有 p 个. 求证：$np\geq d^2$.

4. 求证：存在整数 $n\geq 1$，使得方程

$$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{n}$$

的正整数解 (a,b) 的组数超过 2024.

2024 年希腊数学奥林匹克

程国根 译

1. 设 a,b,c为实数，满足其中两数之差大于 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. 求证：存在整数 x，使得 $$x^2-4(a+b+c)x+12(ab+bc+ca)<0.$$

2. 在 $\triangle ABC$中，$AB<AC<BC$，外接圆为 Γ_{1}. 圆 Γ_{2}的圆心 D在 Γ_{1}的圆周上，且和 BC相切于点 E，和 AB相切于点 F. 设 Γ_{1}和 Γ_{2}交于 K,G两点，KG和 EF,CD分别交于点 M,N. 求证：B,C,N,M四点共圆.

3. 设正整数 $n\ge 2$，A,B为两个有限整数集，$| A|\le n$. C为集合 $\{(a,b)\mid a\in

A,b\in B\}$的一个子集．阿喀琉斯在一块黑板上写下满足 $(a,b)\in C$的所有不同的差 $a-b$，设这些差一共有 d个．他在另一块黑板上写下满足 $(k,l),(k,m)\in C$的所有的三元数组 (k,l,m)，一共有 p个．求证：$np\ge d^{2}$.

4. 求证：存在整数 $n\ge 1$，使得方程 $$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{n}$$的正整数解 (a,b)的组数超过 2024.

解答（PDF 中已展开）

\section*{2024年希腊数学奥林匹克}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\ex 设a,b,c为实数，
↪ 满足其中两数之差大于$\frac{1}{2\sqrt{2}}$．求证：存在整数x，使得$$x^2-4(a+b+c)x+12(ab+bc+ca)<0.$$\vfill\ex
↪ 在$\triangle ABC$中，$AB<AC<BC$，外接圆为Γ_{1}．圆Γ_{2}的圆心D在Γ_{1}的圆周上，
↪ 且和BC相切于点E，和AB相切于点F．设Γ_{1}和Γ_{2}交于K,G两点，
↪ KG和EF,CD分别交于点M,N．求证：B,C,N,M四点共圆．\vfill\ex 设正整数$n\ge 2$，A,B为两个有限整数集，
↪ $|A|\le n$．C为集合$\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$的一个子集．阿喀琉斯在一块黑板上写下满足$(a,b)\in
↪ C$的所有不同的差$a-b$，设这些差一共有$d$个．他在另一块黑板上写下满足$(k,l),(k,m)\in C$的所有的三元数组$(k,l,m)$，
↪ 一共有p个．求证：$np\ge d^{2}$．\vfill\ex 求证：存在整数$n\ge 1$，
↪ 使得方程$$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{n}$$的正整数解(a,b)的组数超过2024．\vfill