2024 年英国数学奥林匹克（第二轮）

2024-01-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_e95cc9c229e6babd

2024 年英国数学奥林匹克（第二轮）

程国根 译

1. 将 $\dfrac{10}{13}=0.7692307692\cdots$ 的十进制表示中，小数点后的前 n 位所构成的整数组成一个数列

$$7,76,769,7692,76923,769230,\cdots.$$

求证：在数列的前 60 项中，至少有 49 项有三个及以上的素因子.
（包含重复的素因子，例如 $76=2\times2\times19$ 有三个素因子.）

2. 求所有函数 $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意整数 n，都有

$$2f(f(n))=5f(n)-2n.$$

3. 在锐角三角形 ABC 中，$AB>AC$. $\triangle ABC$ 的外接圆在点 B 和点 C 处的切线交于点 P. 一条同时过 PB 和 PC 中点的直线与 AB,AC 分别交于点 X,Y.
求证：A,X,P,Y 四点共圆.

4. 设正整数 $m<n$. 起初一共有 n 堆石子，每堆有 m 块石子. 重复执行以下操作：选择两堆石子，从这两堆中移除共 n 块石子. 对于怎样的 (m,n)，可以移除所有石子?

1

英文原文：

British Mathematical Olympiad Round 2 Wednesday 24 January 2024

1. In the sequence $7, 76, 769, 7692, 76923, 769230, \ldots$, the nth term is given by the first n digits after the decimal point in the expansion of $10/13 = 0.7692307692\ldots$.

Prove that of the first 60 terms of the sequence, at least 49 have three or more prime factors (repeated prime factors are allowed; for example, $76 = 2 \times 2 \times 19$ has three prime factors).

2. Find all functions f from the integers to the integers such that for all integers n:

$$2f(f(n)) = 5f(n) - 2n.$$

3. Let ABC be an acute-angled triangle with $AB > AC$. Let P be the intersection of the tangents to the circumcircle of ABC at B and C. The line through the midpoints of line segments PB and PC meets lines AB and AC at X and Y respectively.

Prove that the quadrilateral $AXPY$ is cyclic.

4. Let $m < n$ be positive integers. Start with n piles, each of m objects. Repeatedly carry out the following operation: choose two piles and remove n objects in total from the two piles. For which (m, n) is it possible to empty all the piles?

© 2024 UK Mathematics Trust www.ukmt.org.uk

讲解视频：（也可以点击阅读原文打开）

https://bmos.ukmt.org.uk/solutions/bmo2-2024/

tex 文档：

2024 年英国数学奥林匹克（第二轮）

程国根　译

1. 将 $\dfrac{10}{13}=0.7692307692\cdots$的十进制表示中，小数点后的前 n位所构成的整数组成一个数列 $$7,76,769,7692,76923,769230,\cdots.$$ 求证：在数列的前 60项中，至少有 49项有三个及以上的素因子. （包含重复的素因子，例如 $76=2\times 2\times 19$有三个素因子. ）

2. 求所有函数 f：$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，使得对任意整数 n，都有 $$2f(f(n))=5f(n)-2n.$$

3. 在锐角三角形 ABC中，$AB>AC$. $\triangle ABC$的外接圆在点 B和点 C处的切线交于点 P. 一条同时过 PB和 PC中点的直线与 AB,AC分别交于点 X,Y. 求证：A,X,P,Y四点共圆.

4. 设正整数 $m<n$. 起初一共有 n堆石子，每堆有 m块石子. 重复执行以下操作：选择两堆石子，从这两堆中移除共 n块石子. 对于怎样的 (m,n)，可以移除所有石子?

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年英国数学奥林匹克（第二轮）}\flushright 程国根\quad 译\ex
↪ 将$\dfrac{10}{13}=0.7692307692\cdots$的十进制表示中，
↪ 小数点后的前$n$位所构成的整数组成一个数列$$7,76,769,7692,76923,769230,\cdots.$$
求证：在数列的前 $60$ 项中，至少有 $49$ 项有三个及以上的素因子.
（包含重复的素因子，例如$76=2\times 2\times 19$有三个素因子. ）\vfill\ex 求所有函数$f$：$\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$，
↪ 使得对任意整数$n$，都有$$2f(f(n))=5f(n)-2n.$$\vfill\ex 在锐角三角形$ABC$中，$AB>AC$. $\triangle
↪ ABC$的外接圆在点$B$和点$C$处的切线交于点$P$. 一条同时过$PB$和$PC$中点的直线与$AB,AC$分别交于点$X,Y$.
求证：$A,X,P,Y$四点共圆. \vfill\ex 设正整数$m<n$. 起初一共有$n$堆石子，每堆有$m$块石子. 重复执行以下操作：
↪ 选择两堆石子，从这两堆中移除共$n$块石子. 对于怎样的$(m,n)$，可以移除所有石子？\vfill
```