几道用二进制解决的数列问题

2021-07-13 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ebefd24b2e7efb7e

这是前两天给学生讲的几道数列题：

题目 1 （2013 年高联二试）给定正整数 u, v. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1 = u + v$，对整数 $m \geq 1$，$a_{2m} = a_m + u; a_{2m+1} = a_m + v$. 记 $S_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m (m = 1, 2, \cdots)$. 证明：数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数.

题目 2 （2010 年 IMO 预选题）数列 $x_1, x_2, \cdots$ 定义如下：$x_1 = 1, x_{2k} = -x_k, x_{2k-1} = (-1)^{k+1} x_k (k \geq 1)$. 证明，对于所有的 $n \geq 1, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq 0$.

题目 3 数列 $\{x_n\}_{n \geq 1}$ 定义如下：

$$x_1 = 1, x_{2n} = 1 + x_n, x_{2n+1} = \frac{1}{x_{2n}}$$

求证：对每个正有理数 r，存在唯一的 n，使得 $r = x_n$.

这几道题的共同特征是出现了第 $2n$、$2n+1$ 项与第 n 项的递推关系. 我们以**题目 1** 为例进行分析：

可以将下标用二进制表示，这样的递推关系更加简洁：即二进制末位多一个 0，则加 u；二进制末位多一个 1，则加 v.

于是 u 的个数就等于下标的二进制中 0 的个数加 1；v 的个数就等于下标的二进制中 1 的个数. 我们设 $S_2(n)$ 为 n 在二进制中的数码和 (即 1 的个数). 则有

$$a_n = \left(\lceil \log_2(n+1) \rceil - S_2(n) + 1\right) u + S_2(n) v$$

考虑 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，取 $n = 2^k - 1$ 时，S_n 可以简单表达为

$$\begin{aligned} S_{2^k-1} &= \sum_{i=1}^{2^k-1} a_i \\ &= (2^k - 1 + T_0)u + T_1 v \end{aligned}$$

其中 T_i 为 0 到 $2^k - 1$ 的二进制表示中，i 的总个数. 容易得到 $T_1 = k \cdot 2^{k-1}$，也可分二进制的位数计算出 $T_0 = (k-2) \cdot 2^{k-1} + 1$.

于是

$$\begin{aligned} & S_{2^k-1} \\ =& (2^k - 1 + (k-2)2^{k-1} + 1)u + k \cdot 2^{k-1} v \\ =& (u+v) \cdot k \cdot 2^{k-1} \end{aligned}$$

要使得 S_{2^k-1} 为完全平方数，取 $k=2(u+v)\cdot t^2$，并让 t 取遍全体正整数即可，于是数列 $\{S_n\}$ 中有无穷多项是完全平方数.

题目 2 和**题目 3** 也可用类似方法完成，这里就不再赘述了.

最后顺带一提，今天还给小学生讲了 2012 年 IMO 第 3 题的第 1 问，其核心思想也是利用二进制处理.

题目 4 “欺诈猜数游戏” 在两个玩家甲和乙之间进行，游戏依赖于两个甲和乙都知道的正整数 k 和 n. 游戏开始时甲先选定两个整数 x 和 N，$1\le x\le N$. 甲如实告诉乙 N 的值，但对 x 守口如瓶，乙现在试图通过如下方式的提问来获得关于 x 的信息：每次提问，乙任选一个由若干正整数组成的集合 S （可以重复使用之前提问中使用过的集合），问甲 “ x 是否属于 S? ” 乙可以提任意数量的问题. 在乙每次提问之后，甲必须对乙的提问立刻回答 “是” 或 “否”，甲可以说谎话，并且说谎的次数没有限制，唯一的限制是甲在任意连续 $k+1$ 次回答中至少有一次回答是真话. 在乙问完所有想问的问题之后，乙必须指出一个至多包含 n 个正整数的集合 X，若 x 属于 X，则乙获胜：否则甲获胜.

解答（PDF 中已展开）

证明：（1）若 $n\ge 2^k$，则乙可保证获胜；（2）对所有充分大的整数 k，存在整数 $n\ge 1.99^k$，使得乙无法保证获胜.