一分钟做不等式系列（9）——2025 Serbian TST for the BMO

2025-04-14　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ed43ccfc201bce29

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

28 (2025 Serbian TST for the BMO). 设 $a_1, a_2, \cdots, a_8$ 为实数. 证明:

$$\sum_{i=1}^{8}\left(a_i^2+a_ia_{i+2}\right)\geq\sum_{i=1}^{8}\left(a_ia_{i+1}+a_ia_{i+3}\right).$$

其中下标按模 8 循环，即 $a_9=a_1$，$a_{10}=a_2$，$a_{11}=a_3$. 并确定等号成立的条件.

证明 记 $S_k=\sum_{i=1}^{8}a_ia_{i+k}$，$k\in\{0,1,2,3\}$. 即证 $S_0+S_2\geq S_1+S_3$. 注意到

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{8}\left(a_i-a_{i+1}+a_{i+2}-a_{i+3}\right)^2+\sum_{i=1}^{8}\left(a_i+a_{i+2}-a_{i+3}-a_{i+5}\right)^2\\=&\left(4S_0-6S_1+4S_2-2S_3\right)+\left(4S_0-2S_1+4S_2-6S_3\right)\\=&8\left(S_0+S_2-S_1-S_3\right)\\\geq&0\end{aligned}$$

于是待证不等式成立.

等号成立当且仅当：$\forall 1\leq i\leq 8$，都有

$$a_i-a_{i+1}+a_{i+2}-a_{i+3}=a_i+a_{i+2}-a_{i+3}-a_{i+5}=0$$

即 $a_{i+1}=a_{i+5}$ 且 $a_i+a_{i+2}=a_{i+1}+a_{i+3}$，也即

$$a_1=a_5=x, a_2=a_6=y, a_3=a_7=z, a_4=a_8=x+y-z, \text{其中} x,y,z\in\mathbb{R}.$$

这个比赛的中文名字太长，打个英文的吧…

题目来源：2025 巴尔干数学奥林匹克塞尔维亚代表队选拔考试中文翻译