2022 年高考数学全国乙卷部分试题评析

2022-06-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ed8a5442078866e8

第 4 题

4. 嫦娥二号卫星在完成探月任务后，继续进行深空探测，成为我国第一颗环绕太阳飞行的人造行星．为研究嫦娥二号绕日周期与地球绕日周期的比值，用到数列 $\{b_n\}$：$b_1=1+\dfrac{1}{\alpha_1}$，$b_2=1+\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2}}$，$b_3=1+\dfrac{1}{\alpha_1+\dfrac{1}{\alpha_2+\dfrac{1}{\alpha_3}}}$，$\cdots$，依次类推，其中 $\alpha_k\in\mathbf{N}^*(k=1,2,\cdots)$．则　（　）

A. $b_1<b_5$　　**B.** $b_3<b_8$　　**C.** $b_6<b_2$　　**D.** $b_4<b_7$

解答（PDF 中已展开）

分析

本题背景为连分数，考试时只需代入特殊值 $\alpha_i=1$ 即可得到：$b_1=2$，$b_2=\dfrac{3}{2}$，$b_3=\dfrac{5}{3}$，$b_4=\dfrac{8}{5}$，$\cdots$（斐波那契数列相邻两项之比）．由此容易得到答案为 D.

实际上，可以证明：$b_{2n-1}>b_{2n}$，且

$$b_1>b_3>b_5>\cdots$$

$$b_2<b_4<b_6<\cdots$$

逐一验证选项知，答案为 D.

第 10 题

10. 某棋手与甲、乙、丙三位棋手各比赛一盘，各盘比赛结果相互独立．已知该棋手与甲、乙、丙比赛获胜的概率分别为 p_1，p_2，p_3，且 $p_3>p_2>p_1>0$．记该棋手连胜两盘的概率为 p，则　（　）

A. p 与该棋手和甲、乙、丙的比赛次序无关

B. 该棋手在第二盘与甲比赛，p 最大

C. 该棋手在第二盘与乙比赛，p 最大

D. 该棋手在第二盘与丙比赛，p 最大

解答（PDF 中已展开）

分析

考场上继续代特殊值，$p_3=1$，$p_2=\dfrac{1}{2}$，$p_1=\dfrac{1}{4}$，答案选 D.

设 q_1，q_2，q_3 为 p_1，p_2，p_3 的一个排列，则此时

$$\begin{aligned}p=&q_1q_2(1-q_3)+(1-q_1)q_2(1-q_3)\\=&q_1q_2+q_2q_3-2q_1q_2q_3\\=&q_1q_2+q_2q_3+q_3q_1-2q_1q_2q_3-q_1q_3\\=&(p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1-2p_1p_2p_3)-q_1q_3\end{aligned}$$

括号内为定值，要使 p 最大，则 q_1q_3 最小，于是 $q_2=p_3$，故选 D.

第 11 题

11. 双曲线 C 的两个焦点为 F_1，F_2，以 C 的实轴为直径的圆记为 D，过 F_1 作 D 的切线与 C 交于 M,N 两点，且 $\cos\angle F_1NF_2=\dfrac{3}{5}$，则 C 的离心率为 （　　）

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　**B.** $\dfrac{3}{2}$　　**C.** $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　　**D.** $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

解答（PDF 中已展开）

分析

本题比较常规，但出题人似乎忘记加上 F_1，M，N 三点的位置关系了（比如 M 在线段 F_1N 上），所以本题应有两个正确答案 A、C.

第 12 题

12. 已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$，若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum\limits_{k=1}^{22}f(k)=$ （　　）

A. -21　　**B.** -22　　**C.** -23　　**D.** -24

解答（PDF 中已展开）

分析

考察抽象函数，先根据待求结论消去 $g(x)$.

由题意，

$$\begin{cases}f(x)+g(2-x)=5\\g(2+x)-f(x-2)=7\\g(2+x)=g(2-x)\end{cases}$$

，于是 $f(x)+f(x-2)=-2$，可得 $f(x)$ 周期为 4.

再根据条件求出 $f(1)=-1$，$f(2)=-3$，于是

$$\sum_{k=1}^{22} f(k)=f(1)+f(2)+(f(3)+f(5))+(f(4)+f(6))+\cdots+(f(20)+f(22))=-24.$$

第 16 题

16. 已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 的极小值点和极大值点. 若 $x_1<x_2$, 则 a 的取值范围是_____.

解答（PDF 中已展开）

分析

$f'(x)=2a^x\ln a-2ex$，$f''(x)=2a^x(\ln a)^2-2e$.

1. $a>1$ 时，$f''(x)$ 递增，设 $f''(x_0)=0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 递减，在 $(x_0,+\infty)$ 递增，故 $x_2>x_1$，矛盾.
2. $0<a<1$ 时，$f''(x)$ 递减. 设 $f''(x_0)=0$，则 $x_0=\log_a\dfrac{e}{(\ln a)^2}$. $f'(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 递增，在 $(x_0,+\infty)$ 递减. 要使结论成立，只需 $f'(x_0)>0$. 即

$$\begin{aligned}&\frac{e}{(\ln a)^2}\cdot\ln a>e\log_a\frac{e}{(\ln a)^2}\\ \Longleftrightarrow\ &a^{\frac{1}{\ln a}}>\frac{e}{(\ln a)^2}\\ \Longleftrightarrow\ &\frac{1}{\ln a}\ln a>1-2\ln(-\ln a)\\ \Longleftrightarrow\ &-\ln a>1\end{aligned}$$

即 $a\in(0,\dfrac{1}{e})$.

第 20、21 题

20. 已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2)$，$B(\dfrac{3}{2},-1)$ 两点.

（Ⅰ）求 E 的方程；

（Ⅱ）设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M,N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$. 证明：直线 HN 过定点.

21. 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+ax\mathrm{e}^{-x}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 各恰有一个零点，求 a 的取值范围.

分析

这两题网上很多人发了解答，我就不再写了. 可以参考：2022 年全国乙卷圆锥曲线与导数题解析手写版

第 23 题

23. 已知 a,b,c 都是正数，且 $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}=1$，证明

（Ⅰ）$abc\leqslant\frac{1}{9}$;

（Ⅱ）$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{abc}}$.

解答（PDF 中已展开）

分析

第一问直接均值：

$$1=a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}\geq 3\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}\cdot b^{\frac{3}{2}}\cdot c^{\frac{3}{2}}}=3\sqrt{abc}$$

即 $abc\leq\dfrac{1}{9}$.

第二问看到右边分母的根号，以及不等号方向，可以考虑对左边分母使用均值不等式：$\dfrac{a}{b+c}\leq\dfrac{a}{2\sqrt{bc}}$. 于是只需证明：

$$\frac{a}{2\sqrt{bc}}+\frac{b}{2\sqrt{ca}}+\frac{c}{2\sqrt{ab}}\leq\frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

两边同乘 $2\sqrt{abc}$，即证：

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\leq 1$$

即为条件中的等式.