2026 年哥伦比亚数学奥林匹克

2026-06-02　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ee1ef4ec6fa37b7c

第一天

题 1. 11 名学生参加一场锦标赛. 锦标赛包含从 22 个可选项目中选出的 11 个比赛项目. 这 11 个选定的项目仅在比赛当天才会公布，且每名学生必须恰好参加其中一个项目.
要赢得比赛，学生们必须赢下全部 11 个选定的项目. 为确保能赢得锦标赛，学生们决定提前准备. 已知每名学生花 1 小时准备就能精通一个项目，从而保证在该项目中获胜. 每名学生各自准备，但他们会提前商定好每个人练习哪些项目.
求无论比赛当天需要参加哪些项目，都能保证赢得锦标赛所需的最少总准备时长.

题 2. 设 ABC 是锐角三角形，满足 $AB < AC$，M 是线段 AC 的中点. 点 D 在 AC 上，且满足 $DB = DC$，E 是三角形 ABM 的外接圆与直线 BD 的交点（异于 B）. 设 P、Q 分别是直线 BC 与直线 EM、AE 的交点. 证明 P 是线段 BQ 的中点.

题 3. 设 $a \geq 2$ 为正整数. 对于正整数 m，定义 $c(m)$ 为整除 m 的最大平方数. 称序列 $a_0, a_1, \ldots$ 为**哥伦比亚序列**，若它满足 $a_0 = a$，且对任意 $n \geq 0$，有

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{若 } \sqrt{a_n} \text{为整数,} \\ a_n + c(a_n) & \text{否则.} \end{cases}$$

求所有属于**每一个**哥伦比亚序列的整数.

第二天

题 4. 设 a 和 b 是两个正实数，且 $b \neq 1$. 费利佩执行如下操作：
第一步，他在一张纸上写下数字 a. 之后每一步，他都将上一步写下的数字乘以 b，再写在纸上. 当纸上出现大于 100 的数，或者出现非整数时，费利佩停止书写. 求这张纸上最多能写下多少个数字?

题 5. 求所有实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{100}$，使得

$$\begin{cases} x_3^{100} &= x_1 + x_2 \\ x_4^{100} &= x_2 + x_3 \\ &\cdots \\ x_{100}^{100} &= x_{98} + x_{99} \\ x_1^{100} &= x_{99} + x_{100} \\ x_2^{100} &= x_{100} + x_1 \end{cases}$$

题 6. 设 n 为正整数. 初始时，一个 $n \times n$ 棋盘的所有格子均为白色. 每一步操作允许将棋盘上的一个格子涂成黑色，前提是操作完成后，每一个白色格子都至少与另外两个白色格子有公共边. 求最多可以将多少个格子涂成黑色.