单墫教授出的一道因式分解

2023-07-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ee975ce369dc5dc3

单墫教授昨天在公众号单谈数学上发了此题：

> 将 $x^{12}+2^6$ 分解为整系数的多项式相乘，直至不能进一步分解（为整系数多项式相乘）.

首先，

$$\begin{aligned}&x^{12}+2^6\\=&(x^6)^2+64\\=&(x^6)^2+2\cdot 8\cdot x^6+8^2-16x^6\\=&(x^6+8)^2-(4x^3)^2\\=&(x^6+4x^3+8)(x^6-4x^3+8)\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\=&(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

可得：

$$\begin{aligned}&x^6+4x^3+8\\=&(x^2)^3+(-2x)^3+2^3-3\cdot x^2\cdot(-2x)\cdot 2\\=&(x^2-2x+2)((x^2)^2+(-2x)^2+2^2-x^2(-2x)-(-2x)2-2x^2)\\=&(x^2-2x+2)(x^4+2x^3+2x^2+4x+4)\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}&x^6-4x^3+8\\=&(x^2+2x+2)(x^4-2x^3+2x^2-4x+4)\end{aligned}$$

可以用待定系数法证明 $x^4+2x^3+2x^2+4x+4$ 和 $x^4-2x^3+2x^2-4x+4$ 无法进一步分解.（或者作 $x=t+1$ 换元后用 Eisenstein 判别法.

于是 $x^{12}+2^6$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上的因式分解如下：

$$
\begin{aligned}
&x^{12}+2^6\\
=&(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)\\
&(x^4-2x^3+2x^2-4x+4)\\
&(x^4+2x^3+2x^2+4x+4)
\end{aligned}
$$