一道不等式问题

2024-09-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ef0df7c34c3c451d

给定整数 $n \geq 2$，求最大的正整数 k，使得对任意 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$，都有

$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\right)^2 \geq \frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}$.

解答（PDF 中已展开）

解答：

k 的最大值为 $[\sqrt{n}]$.

一方面，令 $a_1 = 1$，$a_2 = \cdots = a_n = 0$，满足题目要求，此时有 $k \leq \sqrt{n}$.

另一方面，证明 $k = [\sqrt{n}]$ 时，不等式成立．记 $n = k^2 + t$，$t \in \{0, 1, \cdots, 2m\}$．原不等式等价于

$(k^2+t)\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 \geq k^2 \sum_{i=1}^{k^2+t} a_i^2$

$t = 0$ 时，不等式显然成立.

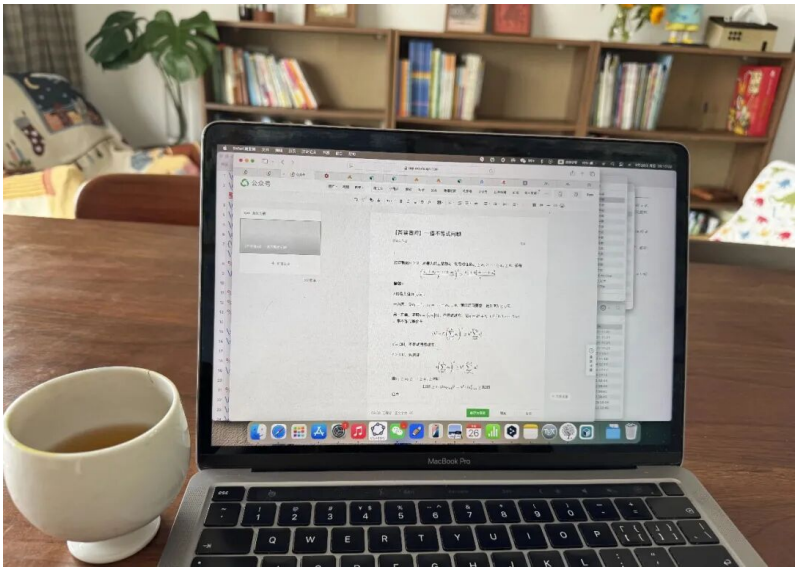
$t \geq 1$ 时，只需证：

$t\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 \geq k^2 \sum_{i=k^2+1}^{k^2+t} a_i^2$

由 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$ 知：

$\text{LHS} \geq t \cdot (k a_{k^2+1})^2 = k^2 \cdot t a_{k^2+1}^2 \geq \text{RHS}$

证毕.



（早上让自己清醒的最佳方式是一杯热茶 + 一道数学题。）