一个有趣的计数分界点：为什么 n≤4 时答案如此简洁？

2026-05-06　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ef5a48f20493ccad

写在前面：本文由我提供完整思路，豆包完善具体过程而成。

今天在阿叶数学公众号上看到一道高考计数题：

> 用数字 $1,2,3,4$ 组成的 4 位数中，满足**数字 i 出现次数不超过 i 次**的总个数为_____.

本题难度不大，用指数型生成函数可以很快解决，答案为

$24(1+x)(1+x+\frac{x^2}{2})(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6})(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24})$

的展开式中 x^4 项的系数.

一般地，在用数字 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 位数中，设满足**数字 i 出现次数不超过 i 次**的总个数为 $f(n)$.

一个非常有趣的现象是：

- 当 $n\le 4$ 时，$f(n)=n^n-(n-1)^n$，例如 $n=4$ 时，$f(4)=4^4-3^4=175$，与实际计数完全一致
- 当 $n>4$ 时，该等式不再成立

本文将完整解释这一现象的成因，**重点给出核心恒等式的双射证明**（揭示其组合本质）.

一、补集转化与容斥原理框架

总共有 n^n 个可能的 n 位数. 我们定义补集事件：

$A_i=\{\text{数字}i\text{出现次数}>i\text{次的}n\text{位数}\},\quad 1\le i\le n$

则不符合条件的数的集合为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，因此：

$f(n)=n^n-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$

根据容斥原理，补集的大小为：

$|A_1\cup\cdots\cup A_n|=\sum|A_i|-\sum|A_i\cap A_j|+\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots$

二、关键观察：$n\le 4$ 时不存在多重违反限制的情况

对于任意两个不同的数字 i,j，$A_i\cap A_j$ 非空的充要条件是：存在一个 n 位数，其中 i 出现至少 $i+1$ 次，j 出现至少 $j+1$ 次. 此时总位数至少为：

$(i+1)+(j+1)=i+j+2$

当 $n \leq 4$ 时，最小的两个数字是 1 和 2，它们的最小违反次数和为：

$1+2+2=5>4$

这意味着**任意两个 A_i, A_j 的交集都是空集**. 更高阶的交集（三个及以上集合）的次数和会更大，自然也为空. 因此，容斥原理在 $n \leq 4$ 时可以极大简化：

$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n-1} |A_i|$

（注：A_n 恒为空集，因为 n 位数中 n 最多出现 n 次，不可能超过 n 次）

这也说明，在 $n>4$ 时，$f(n)$ 不再有上述简单的表达式.

三、核心恒等式的双射证明（本文重点）

现在我们需要证明：对任意正整数 n，

$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i| = (n-1)^n$

这个恒等式是 $n \leq 4$ 时公式成立的关键. 我们先给出简洁的代数证明作为对比，再重点介绍能揭示组合本质的双射证明.

铺垫：简洁代数证明

1. 单个集合的大小为：$|A_i| = \sum_{k=i+1}^{n} \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$
2. 交换求和顺序：$\sum_{i=1}^{n-1} |A_i| = \sum_{k=2}^{n} (k-1)\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$
3. 利用组合恒等式 $(k-1)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1} - \binom{n}{k}$，代入二项式定理：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n}{k}(n-1)^{n-k} \\
=&n\left[n^{n-1}-(n-1)^{n-1}\right]-\left[n^n-(n-1)^n-n(n-1)^{n-1}\right] \\
=&(n-1)^n
\end{aligned}
$$

核心：双射证明　恒等式左边 $\sum |A_i|$ 不是“违反限制的数的个数”，而是**所有数的“违反限制总次数”**：每个数违反 k 个限制，就被计数 k 次.

因此，我们需要构造一个双射，将**所有“带违反标记的 n 位数”一一对应到所有不含数字 n 的 n 位数**（共 $(n-1)^n$ 个）.

定义：带违反标记的 n 位数是一个有序对 (S, i)，其中，S 是用 $1, 2, \ldots, n$ 组成的 n 位数；i 是 S 违反的一个限制，即数字 i 在 S 中出现至少 $i+1$ 次.

我们的目标：建立集合

$X = \{(S,i) \mid S \in \{1,\ldots,n\}^n, i \in \{1,\ldots,n-1\}, \mathrm{count}_i(S) \geq i+1\}$

与集合 $Y = \{1,\ldots,n-1\}^n$ 之间的双射.

关键转化：标记“第 $i+1$ 次出现”的位置　对于任意带违反标记的数 (S,i)，由于数字 i 出现至少 $i+1$ 次，我们可以唯一确定一个**特殊位置** p：

> **核心定义**：p 是 S 中**第 $i+1$ 次出现数字 i 的位置**.

这个位置 p 有两个关键性质：

1. 前 p 个位置中恰好有 $i+1$ 个 i
2. 前 $p-1$ 个位置中恰好有 i 个 i

因此，每个带违反标记的数 (S,i) 都唯一对应一个**带位置标记的数** (S,p)，反之亦然. 集合 X 与集合

$Z=\{(S,p)\mid$ 前$p-1$位中$S[p]$恰好出现$S[p]$次$\}$

是一一对应的.

双射的具体构造　给定带位置标记的数 $(S,p)\in Z$，令 $c=S[p]$（即违反限制的数字），按以下规则构造 $T\in Y$：

位置范围	原数字 $S[k]$	映射规则 $T[k]$
$1\le k\le p-1$	$S[k]<c$	$T[k]=S[k]$
$1\le k\le p-1$	$S[k]=c$	$T[k]=c$
$1\le k\le p-1$	$S[k]>c$	$T[k]=S[k]-1$
$k=p$	任意	$T[p]=c$ （核心标记位）
$p+1\le k\le n$	$S[k]<c$	$T[k]=S[k]$
$p+1\le k\le n$	$S[k]=c$	$T[k]=c+1$ （关键区分规则）
$p+1\le k\le n$	$S[k]>c$	$T[k]=S[k]-1$

规则说明：

- 核心标记位 $T[p]=c$：用于唯一记录违反限制的数字 c
- 关键区分规则：p 之后的所有 c 全部映射为 $c+1$，确保 T 中前 p 位恰好有 $c+1$ 个 c，p 之后没有 c
- 大于 c 的数字减 1：确保 T 中没有数字 n（原数字 n 会被减为 $n-1$）

双射的严格验证

1. 合法性：T 中所有数字都在 1 到 $n-1$ 之间. 特别地，当 $c=n-1$ 时，$i=n-1$，此时 $i+1=n$，即 $p=n$，没有 $p+1$ 到 n 的位置，不会出现 $T[k]=n$ 的情况.
2. 单射性：不同的 (S,p) 会映射到不同的 T. 若 $p_1\neq p_2$，则 T 中第 c_1+1 个 c_1 的位置与第 c_2+1 个 c_2 的位置矛盾；若 $p_1=p_2$，则可唯一还原 S.
3. 满射性：任意 $T\in Y$ 都有唯一原像. 对每个 c 找第 $c+1$ 个 c 的位置，恰好存在一个这样的 c，按规则逆推即可得到唯一的 (S,p).

具体例子演示（$n=4$）

- 正向映射：$S=1123$（违反 $i=1$），第 2 次出现 1 的位置 $p=2$，$c=1$，构造得 $T=(1,1,1,2)$
- 逆向映射：$T=(1,2,1,3)$，唯一的 $c=1$（第 2 个 1 在位置 3），逆推得 $S=(1,3,1,4)$

结合前面的结论，当 $n\leq 4$ 时：

$f(n)=n^n-|\bigcup A_i|=n^n-\sum|A_i|=n^n-(n-1)^n$

四、总结

1. 在 $n\leq 4$ 时公式成立的原因：任意两个数字无法同时违反限制，补集是不交并，且核心恒等式 $\sum|A_i|=(n-1)^n$ 成立.
2. 核心恒等式的本质：通过双射证明，我们揭示了其组合意义 —— 所有 n 位数的违反限制总次数，恰好等于不含数字 n 的 n 位数的总个数.