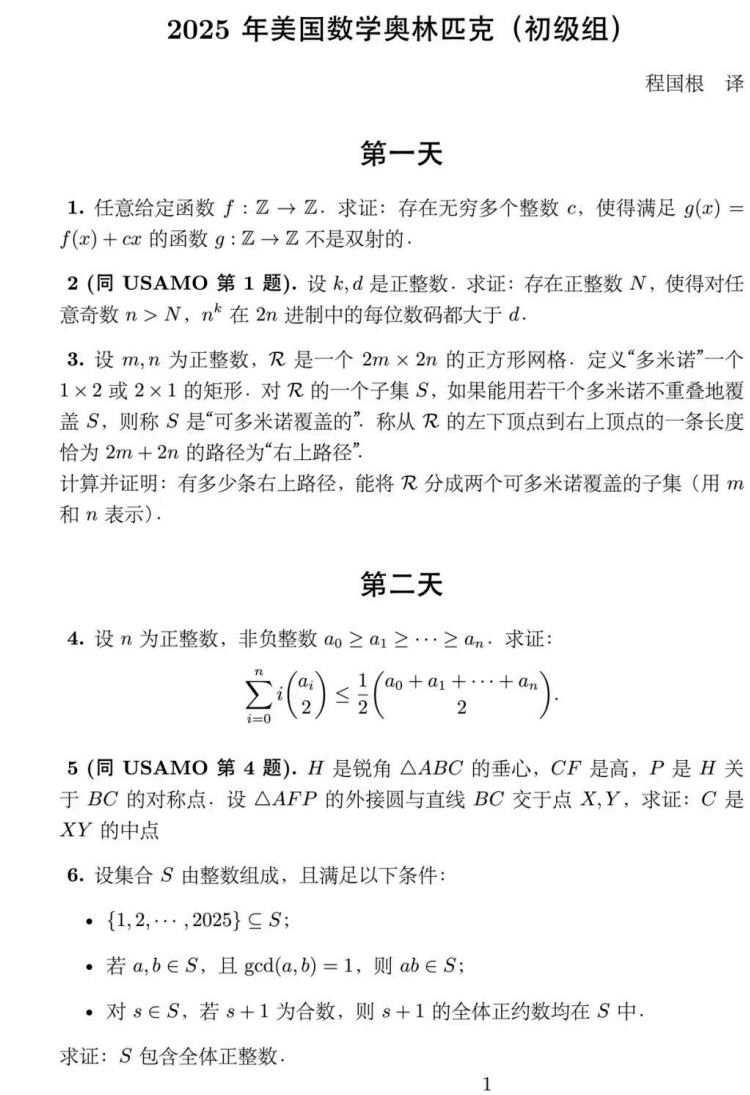
2025 年美国数学奥林匹克（初级组）

2025-03-23　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_efc343b245048380

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读；下方附本站人工转写的文字版，只作阅读与检索之用，若与原图有出入，以公众号原文为准。



2025 年美国数学奥林匹克（初级组）

程国根　译

第一天

1. 任意给定函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$. 求证：存在无穷多个整数 c，使得满足 $g(x)=f(x)+cx$ 的函数 $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 不是双射的.

2 (同 USAMO 第 1 题). 设 k,d 是正整数. 求证：存在正整数 N，使得对任意奇数 $n>N$，n^k 在 $2n$ 进制中的每位数码都大于 d.

3. 设 m,n 为正整数，$\mathcal{R}$ 是一个 $2m\times 2n$ 的正方形网格. 定义“多米诺”一个 1×2 或 2×1 的矩形. 对 $\mathcal{R}$ 的一个子集 S，如果能用若干个多米诺不重叠地覆盖 S，则称 S 是“可多米诺覆盖的”. 称从 $\mathcal{R}$ 的左下顶点到右上顶点的一条长度恰为 $2m+2n$ 的路径为“右上路径”.
计算并证明：有多少条右上路径，能将 $\mathcal{R}$ 分成两个可多米诺覆盖的子集（用 m 和 n 表示）.

第二天

4. 设 n 为正整数，非负整数 $a_0\ge a_1\ge\cdots\ge a_n$. 求证：

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{a_i}{2}\le\frac{1}{2}\binom{a_0+a_1+\cdots+a_n}{2}.$$

5 (同 USAMO 第 4 题). H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，CF 是高，P 是 H 关于 BC 的对称点. 设 $\triangle AFP$ 的外接圆与直线 BC 交于点 X,Y，求证：C 是 XY 的中点

6. 设集合 S 由整数组成，且满足以下条件：

- $\{1,2,\cdots,2025\}\subseteq S$;
- 若 $a,b\in S$，且 $\gcd(a,b)=1$，则 $ab\in S$;
- 对 $s\in S$，若 $s+1$ 为合数，则 $s+1$ 的全体正约数均在 S 中.

求证：S 包含全体正整数.

1

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 2025 年美国数学奥林匹克（初级组）　程国根译
2. 第一天
3. 第 1 题　任意给定函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$. 求证：存在无穷多个整数 c，使得满足 $g(x)=f(x)+cx$ 的函数 $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 不是双射的.

4. 第 2 题（同 USAMO 第 1 题）　设 k,d 是正整数. 求证：存在正整数 N，使得对任意奇数 $n>N$，n^k 在 $2n$ 进制中的每位数码都大于 d.
5. 第 3 题　设 m,n 为正整数，$\mathcal{R}$ 是一个 $2m\times 2n$ 的正方形网格. 定义“多米诺”一个 1×2 或 2×1 的矩形. 对 $\mathcal{R}$ 的一个子集 S，如果能用若干个多米诺不重叠地覆盖 S，则称 S 是“可多米诺覆盖的”. 称从 $\mathcal{R}$ 的左下顶点到右上顶点的一条长度恰为 $2m+2n$ 的路径为“右上路径”. 计算并证明：有多少条右上路径，能将 $\mathcal{R}$ 分成两个可多米诺覆盖的子集（用 m 和 n 表示）.
6. 第二天
7. 第 4 题　设 n 为正整数. 非负整数 $a_0\ge a_1\ge\cdots\ge a_n$. 求证：$\sum_{i=0}^{n}i\binom{a_i}{2}\le\frac{1}{2}\binom{a_0+a_1+\cdots+a_n}{2}$.
8. 第 5 题（同 USAMO 第 4 题）　H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，CF 是高，P 是 H 关于 BC 的对称点. 设 $\triangle AFP$ 的外接圆与直线 BC 交于点 X,Y，求证：C 是 XY 的中点.
9. 第 6 题　设集合 S 由整数组成，且满足以下条件：
10. $\bullet\ \{1,2,\cdots,2025\}\subseteq S$；
11. $\bullet$ 若 $a,b\in S$，且 $\gcd(a,b)=1$，则 $ab\in S$；
12. $\bullet$ 对 $s\in S$，若 $s+1$ 为合数，则 $s+1$ 的全体正约数均在 S 中.
13. 求证：S 包含全体正整数.