联赛前一周：不等式中的“猜取等”

2026-09-04　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f00da0df9565a089

本系列文章均由我提供完整思路、所有例题，并交给 GPT 整理排版而成.

联赛前一周复习不等式，可以重点掌握一个常用技巧：先猜取等，再据此选择证明. 所谓“猜”有具体依据，小参数、简单代入、对称性、端点、整数性、循环结构以及试探性放缩都会留下等号线索.

取等信息通常可以分成三层：

1. 变量可能取什么值；
2. 各类取值出现多少次，或者放在哪些位置；
3. 这些条件怎样决定证明中的零点、系数、相切和分组.

先把取等情形写得尽量具体，再寻找能够在这些情形下取等的估计，往往比直接尝试各种放缩更有方向.

取等值的基本判断

区间、固定和与整数条件常能直接给出取等候选. 凸性把变量推向端点或平均值，整数性再把实数候选修正到相邻整数；若取值只剩两个端点，还要继续确定两端各占多少.

端点与相邻整数

例 1　2025 年奥地利数学奥林匹克地区赛　设 $n \geq 3$，$0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq 2$，且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 5$. 证明 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 9$，并确定等号成立的情形.

分析　先看实数范围内怎样把平方和做大. 若固定 $x_i + x_j$，并且 $0 < x_i \leq x_j < 2$，把一小部分从较小的 x_i 移给较大的 x_j，平方和会增加. 因此极大情形不应同时留下两个内部变量；除了至多一个变量外，其余变量都应落在端点 $0, 2$.

总和等于 5，而每个变量至多为 2. 把总和尽量放到右端点，先放两个 2，还剩 1；其余变量只能取 0. 这给出

$$(2, 2, 1, 0, \ldots, 0)$$

的排列，平方和为 9. 证明时把上述局部调整写成严格计算即可.

猜取等　等号时应有两个变量取 2、一个变量取 1，其余变量取 0.

解答（PDF 中已展开）

解答　若存在 $i \neq j$ 使 $0 < x_i \leq x_j < 2$，取 $0 < \delta \leq \min\{x_i, 2 - x_j\}$，把 (x_i, x_j) 换成 $(x_i - \delta, x_j + \delta)$．总和不变，而平方和的改变量为

$$(x_i - \delta)^2 + (x_j + \delta)^2 - x_i^2 - x_j^2 = 2\delta(x_j - x_i) + 2\delta^2 > 0.$$

所以最大值处至多有一个变量位于 $(0, 2)$，其余变量全在端点 $0, 2$．由总和等于 5，只能恰有两个变量取 2、一个变量取 1，其余为 0．因此

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 9},$$

且等号当且仅当 $(x_1, \ldots, x_n)$ 是

$$\boxed{(2, 2, 1, 0, \ldots, 0)}$$

的一个排列．

说明　凸性先把取值推向端点，总和条件再确定唯一的中间值 1．因此等号形状可以在正式估计之前基本确定．

例 2　**固定和下的整数分式极值**　正整数 $a_1, \ldots, a_{22}$ 满足 $a_1 + \cdots + a_{22} = 59$．求 $F = \sum_{i=1}^{22} \frac{a_i}{a_i + 1}$ 的最大值．

解答（PDF 中已展开）

分析　记 $g(x) = x/(x + 1)$．它在正半轴上严格凹．若先允许 a_i 取正实数，固定 $\sum a_i = 59$ 时，函数和在全相等处最大，中心位置是

$$\frac{59}{22} = 2 + \frac{15}{22}.$$

但整数条件不允许所有变量都取这个数，于是应把取值放在平均数两侧最近的整数 $2, 3$ 上．

还要说明为什么不会出现 $1, 4$ 或更远的整数．若 $p \geq q + 2$，把 (p, q) 改成 $(p - 1, q + 1)$，总和不变；严格凹性说明函数和增加．因此极大情形中任意两项之差至多为 1，所以候选值只能是 $2, 3$．

设有 r 个 3，则 $3r + 2(22 - r) = 59$，得到 $r = 15$．取等数量也随之确定．

猜取等　最大值应在十五个 3 和七个 2 时取得．

解答　若 $p \geq q + 2$，则

$$g(p - 1) + g(q + 1) - g(p) - g(q) = \frac{1}{(q+1)(q+2)} - \frac{1}{p(p+1)} > 0.$$

所以极值时任意两项之差至多为 1，只能有 $a_i \in \{2, 3\}$．由总和条件，七个变量取 2，十五个变量取 3，故

$$\boxed{F_{\max} = 7 \cdot \frac{2}{3} + 15 \cdot \frac{3}{4} = \frac{191}{12}}.$$

说明　先由实数平均值确定中心，再用整数性把取值修正为 $2, 3$．知道这两个值以后，还可构造

$$\frac{x}{x+1} \leq \frac{x+6}{12}, \qquad \frac{x+6}{12} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x-2)(x-3)}{12(x+1)} \geq 0,$$

它恰在 $x = 2, 3$ 处取等．

从端点取值到权重比例

例 3　康托洛维奇不等式　设正实数 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，并且 $0<m\le a_i\le M\qquad(i=1,2,\dots,n)$. 证明

$(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i)\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{a_i}\right)\le \frac{(M+m)^2}{4Mm}$,

并确定等号成立的情形.

解答（PDF 中已展开）

分析　变量被限制在区间 $[m,M]$，而目标同时出现 a_i 与 $1/a_i$. 先尝试把每个 a_i 推到两个端点. 如果所有变量只取 m,M，问题就只剩一个参数：取 M 的系数和

$\theta=\sum_{a_i=M}\lambda_i$.

此时

$A=m+(M-m)\theta,\qquad B=\frac{1-\theta}{m}+\frac{\theta}{M}$,

从而

$AB=1+\frac{(M-m)^2}{Mm}\theta(1-\theta)$.

因此端点取值以后，还要让两端的系数和各为 $1/2$. 这预先给出了两层等号条件：先确定 “取什么值”，再确定 “各占多少”.

区间端点给出

$$(M-a)(a-m)\ge 0\quad\Longleftrightarrow\quad a+\frac{Mm}{a}\le M+m.\qquad(1.1)$$

这个一元估计只在 $a=m,M$ 处取等；求和后再用一次均值不等式，第二层等号会确定两端系数和相等.

猜取等　当 $m<M$ 时，等号应满足

$a_i\in\{m,M\},\qquad \sum_{a_i=m}\lambda_i=\sum_{a_i=M}\lambda_i=\frac{1}{2}$.

解答　记 $A=\sum_{i=1}^n\lambda_i a_i$, $B=\sum_{i=1}^n\lambda_i/a_i$. 由 (1.1) 及 $\sum\lambda_i=1$,

$A+MmB=\sum_{i=1}^n\lambda_i\left(a_i+\frac{Mm}{a_i}\right)\le M+m$.

另一方面，$A+MmB\ge 2\sqrt{MmAB}$. 因此

$$\boxed{AB\le\frac{(M+m)^2}{4Mm}}.$$

若 $m=M$，上式恒取等. 以下设 $m<M$. 第一步取等要求 $a_i\in\{m,M\}\qquad(i=1,2,\dots,n)$. 记 $\theta=\sum_{a_i=M}\lambda_i$，则均值不等式取等还要求 $A=MmB$，化简即得 $\theta=\frac{1}{2}$. 故等号成立当且仅当

$$\boxed{a_i\in\{m,M\}\text{ 对所有}i,\qquad\sum_{a_i=m}\lambda_i=\sum_{a_i=M}\lambda_i=\frac{1}{2}}.$$

等号条件　一元不等式给出 $a_i\in\{m,M\}$；均值不等式给出 $\sum_{a_i=m}\lambda_i=\sum_{a_i=M}\lambda_i=1/2$. 两步条件同时成立时取等.

对称多元题中的 EV 定理

对称多元极值还有一条系统的候选缩减途径：EV 定理可以把 n 元问题压到 $n-1$ 个变量相等以及必要的边界；三元时即为“两元相等”.

EV 定理（Equal Variable Theorem，等变量定理）是一个 n 元结论. 在一类带两个对称约束的极值问题中，它把 n 元搜索降到 $n-1$ 个变量相等以及必要的边界情形；三元时，这正好表现为“两元相等”.

EV 定理的竞赛实用表述. 将 $0 \le x_1 \le \cdots \le x_n$ 排序，固定 $\sum x_i$ 和第二个对称条件：$p \neq 0, 1$ 时固定 $\sum x_i^p$，$p = 0$ 时固定乘积. 研究 $F = \sum f(x_i)$. 若

$g(t) = f'\big(t^{1/(p-1)}\big)$

满足定理所需的严格凸性条件，则内部极值只需检查 $n-1$ 个变量相等的情形；当 $p > 0$ 且研究最小值时，还要检查最小变量为 0 的边界.

完整定理还要区分定义域、p 的范围以及 f 在 0 附近的性质.（注：V. Cîrtoaje, *The Equal Variable Method*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics 8 (2007), Article 15.）在竞赛中，EV 的作用主要是缩小候选范围：若题目具有多元对称性，目标能写成 $\sum f(x_i)$，两个约束又符合定理形式，就可以先令 $n-1$ 个变量相等，再检查边界.

三元示例. 设 $x, y, z \ge 0$，

$x + y + z = 3, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 5.$

求 $x^3 + y^3 + z^3$ 的最大值与最小值. 这里 $p = 2$、$f(u) = u^3$，故 $g(t) = 3t^2$ 严格凸.

求最大值时令 $x = y = t \le z$，由 $2t + z = 3$，$2t^2 + z^2 = 5$ 得 $t = 1 - 1/\sqrt{3}$，$z = 1 + 2/\sqrt{3}$，所以最大值为

$9 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.

求最小值时令 $y = z = t \ge x$. 两组代数解分别违反排序或非负性，因此没有内部候选，只需检查 $x = 0$；由两条约束得 $\{y, z\} = \{1, 2\}$，最小值为 9.

三元情形中，$n-1$ 个变量相等正好表现为两元相等；一般 n 元问题则令 $n-1$ 个变量相等，并同时检查定理要求的边界情形. 使用 EV 时应先核对定理条件，正式解答也可以再寻找更简洁的代数证明.

取等的数量与位置

知道变量可能取哪些值以后，还要确定每种值出现多少次，以及非零项位于哪些下标. 平均数、奇偶性、单调性和调整法都会继续限制取等形状.

正负两组的人数

例 4　2025 年沙特阿拉伯数学竞赛第 3 题　设实数 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{50}$ 满足

$\sum_{i=1}^{50} a_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{50} |a_i| = 624.$

求 $S=a_{50}-a_1$ 的最小值与 $T=a_1a_2\cdots a_{50}$ 的最大值.

解答（PDF 中已展开）

分析 由 $\sum a_i=0$ 与 $\sum|a_i|=624$，正数之和与负数绝对值之和都等于 312. 设负数有 k 个、正数有 h 个；若还有零，则 $k+h<50$.

先看极差 $S=a_{50}-a_1$. 固定 k,h 时，负数绝对值的平均数是 $312/k$，所以最小的负数至少要达到 $-312/k$；正数一侧同理，最大的正数至少为 $312/h$. 因此 S 的下界只和 k,h 有关. 要把 $1/k+1/h$ 做小，应先用满 50 个非零位置，再让两组人数尽量接近，于是自然得到 $25+25$. 两组内部全相等时才能达到这些平均值界.

再看乘积 T. 固定 k,h 后，负数绝对值与正数分别由均值不等式得出：两组内部全相等时乘积最大. 所以剩下的问题仍然只是人数. 为了使乘积为正，负数个数 k 必须为偶数；又最大值处不能含零，于是 $k+h=50$. 连续意义下最优仍在 25 附近，但奇偶性排除了 $k=25$，只需比较最近的 $24,26$.

猜取等

$S_{\min}$ 对应25 个负数 + 25 个正数;$T_{\max}$ 对应$24+26$ 或$26+24$,

并且每一组内部都取相等值.

解答 设负数有 k 个、正数有 h 个，则 $k,h\ge1$ 且 $k+h\le50$. 由两条总和条件，$\sum_{a_i<0}|a_i|=\sum_{a_i>0}a_i=312$. 因此 $a_1\le-312/k$，$a_{50}\ge312/h$，从而

$S\ge312\left(\frac1k+\frac1h\right)\ge\frac{1248}{k+h}\ge\frac{624}{25}$.

等号要求 $k+h=50$、$k=h=25$，并且两组内部都完全相等. 故

$$\boxed{S_{\min}=\frac{624}{25}},$$

且唯一的有序取等数列为前 25 项全等于 $-312/25$，后 25 项全等于 $312/25$.

下面求 T. 若有零项，则 $T=0$；取 24 个负数、26 个正数并令两组内部相等即可得到正乘积，因此最大值处没有零项. 若负数个数 k 为奇数，则 $T<0$，不能取得最大值. 故 k 为偶数，且 $h=50-k$. 分别对负数绝对值和正数使用均值不等式：

$$T\le\left(\tfrac{312}{k}\right)^k\left(\tfrac{312}{50-k}\right)^{50-k}. \qquad (2.1)$$

由对称性只需比较 $k<25$ 的情形. 记 $F(k,h)=(312/k)^k(312/h)^h$，其中 $k+h=50$. 若 $1\le k<h-1$，利用数列 $\left(1+\frac1r\right)^r$ 随正整数 r 递增，有

$$\frac{F(k+1,h-1)}{F(k,h)}=\frac{h}{k+1}\frac{\left(1+\frac{1}{h-1}\right)^{h-1}}{\left(1+\frac1k\right)^k}>1.$$

所以两组人数越接近，(2.1) 的右端越大. 又 k 必为偶数，故只能取 $k=24$ 或 26. 故

$$\boxed{T_{\max}=13^{24}12^{26}}.$$

当 $k=24$ 时，前 24 项全为 -13，后 26 项全为 12；当 $k=26$ 时，前 26 项全为 -12，后 24 项全为 13. 这两种有序数列都取到同一个最大值.

说明 两问都先由均分确定人数应接近 25；乘积的符号条件又把第二问从 $25+25$ 修正为 $24+26$ 或 $26+24$.

非零位置与单调性

例 5　2023 年欧洲数学杯少年组第 4 题　称非负整数 2023 元组 $(a_1, a_2, \ldots, a_{2023})$ 满足

$\sum_{i=1}^{2023} a_i = 2023, \qquad \sum_{i=1}^{2023} \frac{a_i}{2^i} \le 1.$

求最大的正整数 L，使每个这样的数列都满足 $\sum_{i=1}^{2023} i a_i \ge L$.

解答（PDF 中已展开）

分析　目标中下标越大，代价 ia_i 越大；但第二个约束中的系数 2^{-i} 又随下标快速减小. 因此极小情形不能简单把所有质量放在最左边，需要在两个要求之间平衡.

先看非零位置能否相隔很远. 若 $a_i, a_k > 0$ 且 $k \ge i+2$，作调整

$a_i \mapsto a_i - 1, \qquad a_{i+1} \mapsto a_{i+1} + 2, \qquad a_k \mapsto a_k - 1.$

总和不变. 第二个约束左边的改变量为

$-\frac{1}{2^i} + \frac{2}{2^{i+1}} - \frac{1}{2^k} = -\frac{1}{2^k} < 0,$

所以约束变得更宽松；目标 $\sum j a_j$ 的改变量是

$-i + 2(i+1) - k = i + 2 - k \le 0.$

因此这种调整不会使目标变大，却把两个相隔的非零位置向中间合并.

为了说明调整会停止，观察辅助量 $\sum j^2 a_j$ 的改变量为

$-i^2 + 2(i+1)^2 - k^2 < 0,$

而它始终是非负整数，所以有限步后必停. 停止时，非零项只能落在两个相邻位置 $i, i+1$. 此后再由第二个约束确定 i 以及两项的具体数值.

猜取等　极小数列应只有相邻两个非零位置；由 $2^{10} < 2023 < 2^{11}$，最可能的下标是 $10, 11$.

解答　按上述调整反复进行，并以 $\sum j^2 a_j$ 作为严格下降的非负整数辅助量，可知极小数列的非零项只需考虑相邻位置 $i, i+1$.

设这两项为 $a > 0, b \ge 0$. 则 $a + b = 2023$，$a/2^i + b/2^{i+1} \le 1$，即 $2a + b \le 2^{i+1}$. 由于 $2a + b = 2023 + a > 2023$，必有 $2^{i+1} > 2023$，所以 $i \ge 10$.

目标值为 $ia + (i+1)b = 2023i + b$. 若 $i \ge 11$，它至少为 $2023 \cdot 11 > 22228$. 因此只需考察 $i = 10$. 此时 $2a + b \le 2048$，$a + b = 2023$，故 $a \le 25$，从而 $b \ge 1998$. 于是 $\sum i a_i = 20230 + b \ge 22228$. 取 $a_{10} = 25$，$a_{11} = 1998$，其余各项为 0 时取等，因此

$\boxed{L = 22228}$.

说明　先用调整法确定“相邻两处”，再由约束求出具体下标与数值；位置判断和数值计算分开进行.

例 6　2022 年高联 A 卷第 3 题　设 $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ 为非负整数. 存在正整数 $k \le 100$，使

$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k, \qquad a_i = 0 \quad (i > k),$

且

$\sum_{i=1}^{100} a_i = 100, \qquad \sum_{i=1}^{100} i a_i = 2022.$

求 $Q=\sum_{i=1}^{100} i^2a_i$ 的最小值.

解答（PDF 中已展开）

分析 把 a_i 看成 “位置 i 出现了 a_i 次”. 这样共有 100 个位置数据，它们的平均数是

$\frac{\sum ia_i}{\sum a_i}=20.22.$

若暂时没有整数性和单调性，固定平均数时平方和应尽量集中在平均数附近. 恒等式

$100Q-2022^2=\sum_{1\le i<j\le 100}(i-j)^2a_ia_j$

把这一点写得更清楚：位置之间相距越远，右边越大. 因此先试 $20,21$.

由两条和式求得 $a_{20}=78$, $a_{21}=22$，但单调条件要求 $a_{20}\le a_{21}$，所以两点候选失败. 下一步只向左增加最近的位置 19，令

$x=a_{19},\qquad y=a_{20},\qquad z=a_{21}.$

两条和式给出 $x=z-22$, $y=122-2z$；单调性给出 $41\le z\le 48$. 而

$Q=40858+2z,$

所以三点候选中最小的是

$(a_{19},a_{20},a_{21})=(19,40,41),\qquad Q=40940.$

为了把这三个位置推广成全局下界，利用题设已知 $\sum a_i$ 和 $\sum ia_i$，因此对任意二次函数 $f(i)=i^2-\alpha i+\beta$, $\sum f(i)a_i$ 都等于 Q 加上已知常数. 所以可以反过来设计 f 的符号：让远离 $19,20,21$ 的整数点非负，让 19 为零点，并令 $f(20)<0<f(21)$ 且 $f(21)=-f(20)$；这样 $a_{20}\le a_{21}$ 正好能抵消唯一的负项. 条件 $f(19)=0$、$f(21)=-f(20)$ 确定第二个零点为 $62/3$.

猜取等

$(a_{19},a_{20},a_{21})=(19,40,41)$

应取到最小值 40940，而辅助函数可取

$f(x)=(x-19)\left(x-\frac{62}{3}\right).$

解答 取

$f(x)=(x-19)\left(x-\frac{62}{3}\right)=x^2-\frac{119}{3}x+\frac{1178}{3}.$

对整数 $x\le 18$ 或 $x\ge 22$ 有 $f(x)\ge 0$，并且 $f(19)=0$, $f(20)=-2/3$, $f(21)=2/3$. 由于 $\sum ia_i/\sum a_i=20.22$，必有某个 $a_i>0$ 且 $i\ge 21$，故 $k\ge 21$，从而 $a_{20}\le a_{21}$. 于是

$\sum_{i=1}^{100} f(i)a_i\ge\frac{2}{3}(a_{21}-a_{20})\ge 0.$

另一方面，

$\sum_{i=1}^{100} f(i)a_i=Q-\frac{119}{3}\cdot 2022+\frac{1178}{3}\cdot 100,$

所以 $Q\ge\frac{122818}{3}=40939\frac{1}{3}$. Q 为整数，故 $Q\ge 40940$. 前面的三点取法达到该值，因此

$\boxed{Q_{\min}=40940}.$

说明 平均数确定中心位置，单调条件把两点取法修正为 $19,20,21$ 三点. 辅助二次函数再把这三个候选位置与全局下界连接起来.

例 6 中，候选位置一旦确定，辅助二次函数的零点和符号也随之受到限制. 这已经进入下一节的问题：怎样把取等信息写进证明.

取等条件至此已经包含数值、数量和位置三类信息. 当这些条件仍不足以显出规律时，小参数可以继续提供线索.

从小情况猜一般结构

当端点、平均数和单调性还不足以直接看出取等形状时，可以计算几个小参数. 连续出现的零点、周期或大量的 1，往往能提示一般情形中的离散结构.

循环问题中的周期结构

例 7　2025 年 IMSC 国际数学夏令营第 2 题　给定整数 $n \geq 3$. 设非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad x_{n+1} = x_1, \quad x_{n+2} = x_2.$

求

$M = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ x_i + \sqrt{x_{i+1} x_{i+2}} \right\}$

的最小可能值.

解答（PDF 中已展开）

分析　先从小 n 开始. 如果希望 M 小，某个 x_i 已经较大时，最好让 $x_{i+1} x_{i+2} = 0$；于是 “一个零后面跟两个相等的正数” 很自然地出现. 前几个 n 可以试出

n	一个可行取法	M
3	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$
4	$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	$\frac{1}{2}$
5	$(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$
6	$(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	$\frac{1}{4}$

继续看 $n = 7, 8$，仍然是每三个位置中放一个 0，其余位置取同一个正数. 非零位置的个数依次为

$2, 2, 3, 4, 4, 5, \ldots,$

正好是

$m = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$

“取等越怪，做得越快” 在这里颇贴切：每三项一个 0 看起来很不均匀，却同时提示了答案中的 $\lfloor 2n/3 \rfloor$ 和后面的三项分组. 因此猜测

$$\boxed{M_{\min} = \frac{1}{m} = \frac{1}{\lfloor 2n/3 \rfloor}}.$$

这个猜测同时告诉我们证明应当具有 “每三个位置至多贡献 2” 的味道. 但 $n \equiv 1, 2 \pmod 3$ 时，单纯把变量三三分组会留下尾项，因此还要利用循环首尾条件.

解答 记

$m = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$.

设给定数列对应的最大值为 M. 因为 $\sum x_i = 1$，有 $M > 0$. 令

$y_i = \sqrt{\frac{x_i}{M}} \qquad (1 \le i \le n).$

由 M 的定义，

$y_i^2 + y_{i+1}y_{i+2} \le 1 \qquad (1 \le i \le n), \qquad (3.1)$

且

$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{1}{M}. \qquad (3.2)$

所以只需证明

$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le m. \qquad (3.3)$

先处理一条线性排列. 若 $0 \le u_i \le 1$，且

$u_i^2 + u_{i+1}u_{i+2} \le 1$

对所有完整的连续三项成立，则

$\sum_{i=1}^{s} u_i^2 \le \left\lceil \frac{2s}{3} \right\rceil. \qquad (3.4)$

事实上，对任意连续三项，若 $u_{i+1} \ge u_{i+2}$，则

$u_{i+1}^2 + u_{i+2}^2 - u_{i+1}u_{i+2} = u_{i+1}^2 - u_{i+2}(u_{i+1} - u_{i+2}) \le u_{i+1}^2 \le 1.$

若 $u_{i+1} < u_{i+2}$，交换二者同理. 与条件相加便有

$u_i^2 + u_{i+1}^2 + u_{i+2}^2 \le 2. \qquad (3.5)$

把线性排列从左到右三项一组，余下一项或两项分别用 $u_i^2 \le 1$，即得 (3.4).

回到循环数列. 若 $3 \mid n$，直接把

$(y_1, y_2, y_3), (y_4, y_5, y_6), \ldots$

三项一组，由 (3.5) 得

$\sum y_i^2 \le \frac{2n}{3} = m.$

下面设 $n \not\equiv 0 \pmod 3$. 循环平移下标，使

$y_1 = \max_i y_i.$

我们先找出四个连续位置，其平方和不超过 2.

若 $y_2 \ge y_3$，由 (3.1) 在 $i = 1, n$ 处，

$y_1^2 + y_2y_3 \le 1, \qquad y_n^2 + y_1y_2 \le 1.$

因为 $y_2 \ge y_3$、$y_1 \ge y_2$，所以

$y_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \le 2. \qquad (3.6)$

若 $y_2 < y_3$，改用 (3.1) 在 $i = 1, n-1$ 处：

$y_1^2 + y_2y_3 \le 1, \qquad y_{n-1}^2 + y_ny_1 \le 1.$

此时 $y_2y_3 \ge y_2^2$，而 $y_ny_1 \ge y_n^2$，故

$$y_{n-1}^2 + y_n^2 + y_1^2 + y_2^2 \le 2. \qquad (3.7)$$

于是总能从圆周上截下四个连续变量，平方和至多为 2．删去这四项以后，其余 $n-4$ 项形成一条线性排列，可以使用 (3.4)：

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le 2 + \left\lceil \frac{2(n-4)}{3} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor = m.$$

这证明了 (3.3)．由 (3.2)，

$$M \ge \frac{1}{m}.$$

下面给出达到这个值的构造．令

$$x_i = \begin{cases} 0, & i \equiv 1 \pmod 3, \\ \dfrac{1}{m}, & i \not\equiv 1 \pmod 3. \end{cases}$$

在 $1, \dots, n$ 中恰有 m 个非零项，所以 $\sum x_i = 1$．任意三个循环连续位置中至少有一个零；若 $x_i = 1/m$，则 x_{i+1}, x_{i+2} 中至少一个为零，故

$$x_i + \sqrt{x_{i+1}x_{i+2}} = \frac{1}{m}.$$

若 $x_i = 0$，对应表达式也不超过 $1/m$．于是

$$\boxed{M_{\min} = \frac{1}{\lfloor 2n/3 \rfloor}}.$$

说明　小情况同时给出三个信息：答案中的 $\lfloor 2n/3 \rfloor$、每三项出现一个零、非零项取相同值．由此自然得到三项分组，并在余数不为 0 时寻找循环端部的补充估计．

整数条件还可能产生另一种醒目的取等形状：大量的 1．

整数问题中的大量 1

例 8　数之谜原创代数 419　给定整数 $m, n > 2$．正整数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 满足

$$P = m\sum_{k=1}^{n} x_k = \prod_{k=1}^{n} x_k.$$

求 P 的最大可能值．

解答（PDF 中已展开）

分析　先看几个小参数．取 $m = 3$ 时，可以试到

n	取等候选	P
3	$(1, 4, 15)$	60
4	$(1, 1, 4, 18)$	72
5	$(1, 1, 1, 4, 21)$	84

再看 $n = 3, m = 4$，候选变成 $(1, 5, 24)$．这些小情况给出一个很稳定的形状：

$$x_1 = \cdots = x_{n-2} = 1, \qquad x_{n-1} = m + 1, \qquad x_n = m(m + n - 1).$$

因此猜测

$P_{\max} = m(m+1)(m+n-1).$

把变量重新排序为

$x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n,$

并记

$A = x_1 + \cdots + x_{n-1}, \qquad Q = x_1 x_2 \cdots x_{n-1}.$

题设给出

$Qx_n = m(A + x_n),$

所以

$x_n = \frac{mA}{Q-m}, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{AQ}{Q-m}. \qquad (3.8)$

猜到的取等中恰有 $Q = m+1$，于是分母 $Q-m$ 达到正整数的最小值 1；同时，前 $n-1$ 个正整数中有 $n-2$ 个 1，这又是固定乘积时把和做大的极端形状. 这两个现象已经提示了证明中要控制的两个量：$Q-m$ 和 A.

猜取等 等号应在

$(x_1, \ldots, x_n) = \big(1, \ldots, 1, m+1, m(m+n-1)\big)$

的任意排列处取得.

解答 仍设

$A = \sum_{i=1}^{n-1} x_i, \qquad Q = \prod_{i=1}^{n-1} x_i,$

并令 $S = \sum_{i=1}^{n} x_i$. 由 (3.8)，

$S = \frac{AQ}{Q-m}, \qquad Q > m.$

因为 Q 为整数，

$Q \ge m+1. \qquad (3.9)$

对正整数 $u_1, \ldots, u_r$，反复使用

$uv + 1 \ge u + v$

可得

$\prod_{i=1}^{r} u_i \ge \sum_{i=1}^{r} u_i - (r-1).$

应用于 $x_1, \ldots, x_{n-1}$，有

$A \le Q + n - 2. \qquad (3.10)$

另一方面，由排序可知 $A \le (n-1)x_n$. 而

$Q - m = \frac{mA}{x_n},$

所以

$Q - m \le m(n-1), \qquad Q \le mn. \qquad (3.11)$

由 (3.8)--(3.11)，

$S \le \frac{Q(Q+n-2)}{Q-m}.$

把猜到的答案与右边比较：

$$(m+1)(m+n-1)-\frac{Q(Q+n-2)}{Q-m}$$
$$=\frac{(Q-m-1)\big(m(m+n-1)-Q\big)}{Q-m}\geq 0.$$

第一因子由 $Q\geq m+1$ 非负；第二因子由 $Q\leq mn<m(m+n-1)$ 为正．于是

$S\leq (m+1)(m+n-1),$

从而

$\boxed{P_{\max}=m(m+1)(m+n-1)}.$

若取等，则必须有 $Q=m+1$，并且 (3.10) 也取等．正整数满足

$\prod_{i=1}^{n-1}x_i=\sum_{i=1}^{n-1}x_i-(n-2)$

时，前 $n-1$ 个数中至多一个大于 1．因此

$x_1=\cdots=x_{n-2}=1,\qquad x_{n-1}=m+1.$

再由 $x_n=mA/(Q-m)$ 得到

$x_n=m(m+n-1).$

所以最大值情形正是上述取法的任意排列.

说明　小情况先猜出了“大量 1”．这个形状随即提示 Q 应尽量靠近 m，最终得到 $Q=m+1$；它也提示 (3.10) 的等号应由大量 1 实现．取等形状因此直接决定了中间量和最后的因式分解.

什么时候先看小情况？答案可能含 $\lfloor cn\rfloor$ 或按模分类、条件带循环或递推、变量要求取整数，或者局部项中出现乘积、最小值、绝对值时，都可以先算几个小参数．前两题分别暴露了“周期零点”和“大量 1”两种结构；小情况的作用就是先把这种形状找出来.

两题都说明，小情况的作用并非替代证明，并改为先找到一般情形中最难猜的那部分结构．猜到以后，证明往往会被迫沿着这个结构展开.

由取等条件构造证明

取等点、数量和位置确定以后，可以反过来约束证明的形式：先把非对称取等点归一化，或把取等值写成辅助多项式的零点；一元上界可由相切条件确定，均值不等式中的倍率可由取等比例确定，部分乘积与部分和则用来把整体条件写进证明.

猜到取等点后先归一化

例 9　一道预赛题：从等号关系到归一化　已知正数 a,b,c 满足

$2a+4b+7c\leq 2abc,$

求 $a+b+c$ 的最小值.（注：本例及“先由消元寻找取等关系，再按取等点作代换”的思路改写自所附材料《以一道预赛题为例，谈谈猜取等条件的重要性》（程国根，恩次方根，2024）.）

解答（PDF 中已展开）

分析　约束左边是一次齐次式，右边是三次齐次式．如果 $2a+4b+7c<2abc$，把三个变量同时缩小到某个比例 $t<1$，一次项按 t 缩放，三次项按 t^3 缩放；可以一直缩到两边恰好相等，同时使 $a+b+c$ 变小．因此最小值处先有

$$2a+4b+7c=2abc.$$

把 c 消去时自然出现

$$d=2ab-7>0,\qquad c=\tfrac{2a+4b}{d}.$$

此时若直接对 $a+b+c$ 求极值，表达式并不简洁．这里暂时不求最优值，只希望从一次均值放缩中得到取等关系．要确定 a,b 两个未知量，需要两条独立的等号条件，所以分别按 b 和 a 组织一次二元均值不等式．

先写

$$a=\tfrac{d}{2b}+\tfrac{7}{2b},\qquad c=\tfrac{1}{b}+\tfrac{4b+7/b}{d}.$$

于是可以把 $\frac{d}{2b}$ 与 $\frac{4b+7/b}{d}$ 配成一对；取等要求

$$d^2=8b^2+14.\qquad(4.1)$$

同理，改写

$$b=\tfrac{d}{2a}+\tfrac{7}{2a},\qquad c=\tfrac{2}{a}+\tfrac{2a+14/a}{d},$$

再配成一对，得到第二条取等关系

$$d^2=4a^2+28.\qquad(4.2)$$

现在只是在猜点，不必完整解方程组．由 (4.2)

$$(d-2a)(d+2a)=28.$$

两个因子均为正，可以先试一组整齐的正因子 $2,14$，得到 $d=8$，$a=3$．再由 $d=2ab-7$ 得 $b=5/2$；代回 (4.1) 正好成立，最后求得 $c=2$．因此得到候选

$$(a,b,c)=\left(3,\tfrac{5}{2},2\right).$$

由此得到取等猜测．

猜取等　把这个点归一化：设

$$a=3x,\qquad b=\tfrac{5}{2}y,\qquad c=2z.$$

于是等号位置变成 $x=y=z=1$；后面的均值不等式应当在这个点同时取等．

解答　条件化为

$$3x+5y+7z\le 15xyz.$$

由加权均值不等式，

$$3x+5y+7z\ge 15\sqrt[15]{x^3y^5z^7},$$

故 $x^6y^5z^4\ge 1$．另一方面，

$$a+b+c=\tfrac{6x+5y+4z}{2}\ge\tfrac{15}{2}\sqrt[15]{x^6y^5z^4}\ge\tfrac{15}{2}.$$

两次均值不等式同时取等要求 $x=y=z=1$，即 $(a,b,c)=(3,5/2,2)$；原约束也在此处取等，因

此

$$\boxed{\min(a+b+c)=\frac{15}{2}}.$$

说明 消元与试探性放缩用于产生取等候选；归一化以后重新开始证明. 对正取等点 (a_0,b_0,c_0)，可设 $a=a_0x$, $b=b_0y$, $c=c_0z$，把等号位置改成 $x=y=z=1$，再从新的约束和目标式确定均值不等式的系数与指数.

例 9 中的取等猜测来自一次试探性变形. 到这里先回答了 “取什么值”；很多题还需要继续确定这些值出现多少次、或者出现在哪些位置.

把取等点写进一元估计

例 10　2023 年俄罗斯数学奥林匹克十年级组第 8 题 给定 $a\in(0,1)$ 和正整数 n. 正实数 $x_0,x_1,\dots,x_n$ 满足

$\sum_{i=0}^{n}x_i=n+a,\qquad \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{x_i}=n+\frac{1}{a}.$

求 $\sum_{i=0}^{n}x_i^2$ 的最小值.

解答（PDF 中已展开）

分析 两条约束同时含 x_i 与 $1/x_i$. 先把全 1 作为基准：若把其中一个 1 改成 a，两条和式分别增加 $a-1$ 与 $1/a-1$，恰好与题设吻合. 因此最先应检查

$\{a,1,1,\dots,1\}.$

目标是平方和，而题设只控制 $\sum x_i$ 与 $\sum 1/x_i$. 所以需要一个逐项下界

$x^2\ge\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x}.$

乘以 $x>0$ 后得到三次多项式. 已知候选等号值是 $a,1$：令 a 为一个根；为了使多项式在 1 的两侧不改变所需符号，把 1 取成二重根，于是自然出现

$(x-a)(x-1)^2.$

这个因子要逐项非负，还需证明 $x\ge a$. 固定某个 $x_i=x$，对其余 n 个变量应用柯西不等式，可以由两条和式推出

$a\le x\le\frac{n+a}{na+1}.$

因此所有变量确实都在 a 的右侧，一元辅助式可以逐项使用.

猜取等 等号时应恰有一个变量取 a，其余 n 个变量取 1；辅助多项式取 $(x-a)(x-1)^2$.

解答 固定某个 $x=x_i$. 对其余 n 个变量使用柯西不等式得

$(n+a-x)\left(n+\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)\ge n^2.$

化简为 $(x-a)\big((na+1)x-(n+a)\big)\le 0$，故 $a\le x\le\frac{n+a}{na+1}$. 于是 $(x_i-a)(x_i-1)^2\ge 0$. 除以 $x_i>0$ 并展开：

$x_i^2\ge(a+2)x_i-(2a+1)+\frac{a}{x_i}.\qquad(4.3)$

逐项求和并代入条件，

$\sum_{i=0}^{n}x_i^2\ge(a+2)(n+a)-(2a+1)(n+1)+a\left(n+\frac{1}{a}\right)=n+a^2.$

(4.3) 取等要求 $x_i \in \{a, 1\}$. 总和条件进一步确定恰有一个 a、其余 n 个为 1，所以

$$\boxed{\min \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = n + a^2}.$$

说明 等号值 $a, 1$ 给出因子 $(x-a)(x-1)^2$. 展开并除以 x 后只出现 $x^2, x, 1, 1/x$，正好可以利用题设的两条和式求和.

例 11 **2021 年中国国家队选拔考试第 4 题** 设 $x_1, x_2, \ldots, x_{60} \in [-1, 1]$，并约定 $x_0 = x_{60}$、$x_{61} = x_1$. 求 $E = \sum_{i=1}^{60} x_i^2 (x_{i+1} - x_{i-1})$ 的最大值.

解答（PDF 中已展开）

分析 原式含 x_{i-1}, x_i, x_{i+1}，直接逐项估计不容易使用循环条件. 先循环移项：

$E = \sum_{i=1}^{60} x_i x_{i+1} (x_i - x_{i+1})$.

恒等式

$3xy(x-y) = x^3 - y^3 - (x-y)^3$

把每一项分成一个循环后会相消的三次差，以及一个只依赖相邻差的立方. 令

$t_i = x_{i+1} - x_i$,

则 $t_i \in [-2, 2]$、$\sum t_i = 0$，并且 $E = \frac{1}{3} \sum t_i^3$. 问题于是变成：在 $[-2, 2]$ 上给 t^3 找一个一次上界 $t^3 \le \lambda t + C$.

因为 $\sum t_i = 0$，求和后 λt 会消失，只剩常数 C.

若上界要在总和取等，它必须允许正、负两种差值同时取等. 正差能达到的端点是 2，于是让直线经过 $t = 2$，再让它与曲线在某个负内点 $t = -u$ 相切. 相切给出 $3u^2 = \lambda$，两点同高给出 $8 - 2\lambda = -u^3 + \lambda u$；解得 $u = 1, \lambda = 3, C = 2$. 因此一元等号点应为

$t = -1, \qquad t = 2.$

这些局部差值还必须组成一个落在 $[-1, 1]$ 内的循环，等号分析中再检查这一点.

猜取等 相邻差应只取 $-1, 2$；结合零和条件，60 个差中应有 20 个 2、40 个 -1，最终很可能形成长度 3 的周期.

解答 因为 $(t+1)^2(t-2) \le 0 \qquad (-2 \le t \le 2)$，所以 $t^3 \le 3t + 2$. 又 $E = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{60} t_i^3$，故 $3E \le 3 \sum_{i=1}^{60} t_i + 120 = 120$，从而

$$\boxed{E_{\max} = 40}.$$

若取等，则每个 t_i 都必须属于 $\{-1, 2\}$. 设其中有 r 个 2，则 $2r - (60 - r) = 0$，故 $r = 20$. 若 $t_i = 2$，由 $x_i, x_{i+1} \in [-1, 1]$ 可知 $x_i = -1, \qquad x_{i+1} = 1$. 此时 t_{i+1} 不能取 2，故 $t_{i+1} = -1$，从而 $x_{i+2} = 0$；接着 t_{i+2} 仍只能取 -1，得到 $x_{i+3} = -1$；此时下一步不能再取 -1，只能取 2. 因此差值按 $2, -1, -1$ 循环出现，相应地 (x_i) 是 $1, 0, -1, 1, 0, -1, \ldots$ 的循环移位. 这个取法确实给出 $E = 40$.

等号条件 一元不等式的等号点给出 $t_i \in \{-1, 2\}$；再结合 $\sum t_i = 0$、$x_i \in [-1, 1]$ 与循环条件，可确定差值按 $2, -1, -1$ 重复.

由取等比例确定均值不等式

例 12　2022 年高联 A1 卷第 1 题　实数 a,b,c,d 满足

$$a\geq b,\qquad c\geq d,\qquad |a|+2|b|+3|c|+4|d|=1.$$

记 $P=(a-b)(b-c)(c-d)$. 求 P 的最小值与最大值.

解答（PDF 中已展开）

分析　因为 $a-b\geq 0$、$c-d\geq 0$，P 的符号只由 $b-c$ 决定，所以最大值与最小值分开处理. 两种情形都准备对三个非负因子使用三元均值不等式；关键是给三个差乘什么倍率，才能使它们的和被

$$|a|+2|b|+3|c|+4|d|=1$$

控制.

先看 $b\geq c$，此时 $P\geq 0$. 设三个量为

$$\alpha(a-b),\quad \beta(b-c),\quad \gamma(c-d).$$

它们的和是

$$\alpha a+(\beta-\alpha)b+(\gamma-\beta)c-\gamma d.$$

为了尽量利用题设系数，先让 a,b,d 的系数分别等于 $1,2,4$：

$$\alpha=1,\qquad \beta-\alpha=2,\qquad \gamma=4.$$

于是得到 $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,3,4)$，而 c 的系数只有 $1\leq 3$. 这意味着若最后取等，题设中多出的 $2|c|$ 必须消失，所以应有 $c=0$. 均值不等式取等还要求

$$a-b=3(b-c)=4(c-d).$$

若 $b<c$，对 $-P=(a-b)(c-b)(c-d)$ 做同样处理. 设倍率为 α,β,γ，希望 a,b,c 的系数依次达到 $1,2,3$，得到

$$\alpha=1,\qquad \alpha+\beta=2,\qquad \beta+\gamma=3,$$

所以 $(\alpha,\beta,\gamma)=(1,1,2)$. 这时 d 只用到 $2|d|$，等号会迫使 $d=0$.

猜取等　最大值时应有 $c=0$ 且 $a-b=3b=-4d$；最小值时应有 $d=0$ 且 $a-b=c-b=2c$.

解答　当 $b\geq c$ 时，

$P\leq \frac{1}{12}\left(\frac{a+2b+c-4d}{3}\right)^3\leq \frac{1}{324}\left(|a|+2|b|+3|c|+4|d|\right)^3=\frac{1}{324}$.

等号要求 $c=0,\qquad a-b=3b=4(-d)$，以及 $a,b\geq 0,d\leq 0$. 代入题设条件得 $(a,b,c,d)=(4/9,1/9,0,-1/12)$，故

$$\boxed{P_{\max}=\frac{1}{324}}.$$

当 $b<c$ 时，

$-P\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a-2b+3c-2d}{3}\right)^3\leq \frac{1}{54}\left(|a|+2|b|+3|c|+4|d|\right)^3=\frac{1}{54}$.

等号要求 $d=0,\qquad a-b=c-b=2c$, 并有 $a,c\geq 0,b\leq 0$. 于是 $(a,b,c,d)=(1/6,-1/6,1/6,0)$，故

$\boxed{P_{\min}=-\dfrac{1}{54}}$.

说明 题设中的绝对值系数既决定均值不等式中三个因子的倍率，也决定取等时哪些变量必须为零.

让整体条件进入证明

例 13 **2025 年奥地利数学奥林匹克全国决赛第 4 题** 设 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 为正实数，且 $a_1a_2\cdots a_n=2^n$. 证明

$$a_1^2+a_1a_2^2+a_1a_2a_3^2+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n^2\geq 4(2^n-1),$$

并确定等号成立的条件.

解答（PDF 中已展开）

分析 若先看 $n=1,2$ 的小情况，乘积条件和右端常数都把候选指向 $a_i=2$. 对一般 n，乘积条件 $a_1a_2\cdots a_n=2^n$ 仍给出同一个候选：全取 2. 代入左边得到

$$4+8+\cdots+2^{n+1}=4(2^n-1),$$

正好等于右边，所以 $a_k=2$ 应当是等号值.

接着考虑怎样让乘积条件进入证明. 记 $P_k=a_1\cdots a_k$、$P_0=1$，则第 k 项是 $P_{k-1}a_k^2$，而右边可以写成

$$4(P_n-P_0).$$

这提示逐项下界最好能写成

$$P_{k-1}a_k^2\geq c(P_k-P_{k-1}),$$

这样求和后中间的部分乘积自动相消. 约去 P_{k-1} 后是

$$a_k^2\geq c(a_k-1).$$

再要求它在候选值 $a_k=2$ 处取等，立刻确定 $c=4$；所得一元不等式就是

$$a_k^2-4a_k+4=(a_k-2)^2\geq 0.$$

猜取等 唯一等号情形应为 $a_1=\cdots=a_n=2$.

解答 由 $(a_k-2)^2\geq 0$ 得 $a_k^2\geq 4a_k-4$. 乘以 $P_{k-1}=a_1a_2\cdots a_{k-1}>0$，有 $P_{k-1}a_k^2\geq 4P_k-4P_{k-1}$. 对 $k=1,2,\dots,n$ 求和，右边的中间项相消：

$$\sum_{k=1}^{n}P_{k-1}a_k^2\geq 4(P_n-P_0)=4(2^n-1).$$

这就是所证不等式.

由于每个 $P_{k-1}>0$，总和取等当且仅当每个 $(a_k-2)^2=0$，故

$\boxed{a_1=a_2=\cdots=a_n=2}$

是唯一等号情形.

说明 “求和后只留下 P_n-P_0” 决定裂项形式，“在 $a_k=2$ 处取等” 再决定系数 4.

例 14　2025 年罗马尼亚国家队选拔考试第 3 题　设 $n \geq 2$，正实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. 记

$m = \min_{1 \leq k \leq n} \frac{x_k}{1+x_1+\cdots+x_k}$,　　$M = \max_{1 \leq k \leq n} \frac{x_k}{1+x_1+\cdots+x_k}$.

分别求 m 的最大值与 M 的最小值.

解答（PDF 中已展开）

分析　分式的分母不断累加，直接比较各项不方便. 令

$S_k = 1 + x_1 + \cdots + x_k$,　　$S_0 = 1$.

则

$\frac{x_k}{S_k} = 1 - \frac{S_{k-1}}{S_k}$.

记

$A_k = \frac{x_k}{S_k}$,　　$B_k = 1 - A_k = \frac{S_{k-1}}{S_k}$.

关键是 B_k 的乘积完全由总和决定：

$\prod_{k=1}^{n} B_k = \frac{S_0}{S_n} = \frac{1}{2}$.

若要把最小的 A_k 尽量做大，就要把最大的 B_k 尽量做小；若要把最大的 A_k 尽量做小，就要把最小的 B_k 尽量做大. 两种方向都面对同一个固定乘积问题，因此都指向

$B_1 = B_2 = \cdots = B_n = 2^{-1/n}$.

一旦 B_k 全相等，就有 $S_k/S_{k-1} = 2^{1/n}$，所以部分和成等比数列，原变量也随之确定.

猜取等　两个问题应有同一个极值

$1 - 2^{-1/n}$,

取等时

$\frac{S_{k-1}}{S_k} = 2^{-1/n} \quad (k = 1, \ldots, n)$.

解答　记 $A_k = x_k/S_k$，$B_k = 1 - A_k = S_{k-1}/S_k$. 有 $\prod_{k=1}^{n} B_k = \frac{1}{2}$. 若 $m = \min A_k$，则 $B_k \leq 1 - m$，故 $\frac{1}{2} = \prod B_k \leq (1-m)^n$，从而 $m \leq 1 - 2^{-1/n}$. 若 $M = \max A_k$，则 $B_k \geq 1 - M$，故 $\frac{1}{2} = \prod B_k \geq (1-M)^n$，从而 $M \geq 1 - 2^{-1/n}$.

令 $q = 2^{1/n}$，取 $x_k = q^{k-1}(q-1) \quad (k = 1, \ldots, n)$. 则 $x_1 + \cdots + x_n = q^n - 1 = 1$，且每个 $B_k = 1/q = 2^{-1/n}$，因此每个 $A_k = 1 - 2^{-1/n}$. 于是

$\boxed{\max m = \min M = 1 - 2^{-1/n}}$.

等号条件　两个方向的等号条件都要求 $B_1 = \cdots = B_n = 2^{-1/n}$. 因此 $S_k/S_{k-1} = 2^{1/n}$，部分和成等比数列，原数列也随之确定.

这些构造有同一个出发点：先把取等猜测写成对估计式的要求，再利用题设验证估计在全部允许取值上成立. 取等信息由此直接参与证明的设计.

这一部分的共同点很明确：证明并非先选一个熟悉的不等式再去碰运气，并改为先把取等点写出来，再要求所用估计在这些点上取等. 取等猜得越具体，证明中可选择的零点、系数和分组也越具体.

小结：“猜取等”的使用顺序

遇到不等式极值题，可以依次检查：

1. **先看容易确定的取值.** 区间看端点，固定和看平均，整数条件看相邻整数；对称多元题还可以检查 EV 的适用条件.
2. **补足数量和位置.** 两端点各占多少、正负各有几项、非零项位于哪里，常由平均、奇偶、单调和调整法决定.
3. **参数题试小情况.** 连续几个小参数若出现同一周期、零点或大量重复取值，就把这个形状写成一般形式.
4. **由取等条件选择证明.** 零点决定辅助多项式，相切点决定一元上界，比例决定均值不等式中的倍率，部分乘积和部分和决定相消结构.

若暂时找不到合适的放缩，可以先明确写出“猜取等”的情形. 取等条件写得越具体，能够使用的证明形式通常也越明确.

习题

每题先写出可能的取等情形，再检查数量、位置和证明构造.

习题 1　2024 年法国数学奥林匹克集训题

设 n 为正整数，$x_1, x_2, \dots, x_n$ 为非负实数. 证明

$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i x_i\right) \le \frac{(n+1)^2}{4n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$,

并确定等号成立的情形.

习题 2　2021 年蒙古数学奥林匹克少年组第 3 题　固定 $n \ge 3$. 若对每个 k 都有 $0 \le \sum_{i \ne k} a_i \le 1$，记 $m = \min a_i$、$M = \max a_i$. 分别求 M 的最大值与 m 的最小值.

习题 3　2024 年罗马尼亚国家队选拔考试第 2 题　固定整数 $n \ge 2$. 对不全相等的实数 $a_1, \dots, a_n$，令

$d = \max_{i<j} |a_i - a_j|, \qquad s = \sum_{i<j} |a_i - a_j|$.

求 s/d 的最小值与最大值，并描述相应取等情形.

习题 4　2024 年中国女子数学奥林匹克第 7 题　设 $n \ge 2$，非负实数 $a_1, \dots, a_n$ 满足 $a_1 + \cdots + a_n = n$，下标按模 n 理解. 求

$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^4 + a_i^2 + 1}{a_{i+1}^4 + a_{i+1}^3 + a_{i+1}^2 + a_{i+1} + 1}$

的最小值与最大值，并先猜测相应的取等情形.

习题提示

1. 若 $S=\sum x_i>0$, 令 $\lambda_i=\frac{x_i}{S}$. 把题目化成正文例 3 的康托洛维奇不等式, 其中 $a_i=i\in[1,n]$. 等号时只有 x_1,x_n 可以非零，且 $x_1=x_n$.

2. 令 $S=\sum a_i$，并记 $b_i=S-a_i=\sum_{j\neq i}a_j\in[0,1]$. 于是

$S=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n b_i,\qquad a_i=S-b_i.$

若 $b_j=\min b_i$，则

$M=\frac{\sum_{i\neq j}b_i-(n-2)b_j}{n-1}\leq 1.$

若 $b_j=\max b_i$，同理

$m=\frac{\sum_{i\neq j}b_i-(n-2)b_j}{n-1}\geq -\frac{n-2}{n-1}.$

再由这两步的等号条件写出取等数列.

3. 先排序 $a_1\leq\cdots\leq a_n$，令 $\Delta_k=a_{k+1}-a_k\geq 0$. 把 d,s 都写成 Δ_k 的线性组合：$d=\sum_{k=1}^{n-1}\Delta_k$，$s=\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)\Delta_k$. 固定 d 后，只需比较系数 $k(n-k)$ 的最小值与最大值. 奇数 n 时，最大系数在两个相邻下标处相同，因此等号情形会保留一个参数.

4. 记 $f(x)=1+x^2+x^4$，$h(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$. 求最小值时，先验证 $5f(x)\geq 3h(x)$，从而

$\sum_{i=1}^n\frac{f(a_i)}{h(a_{i+1})}\geq\frac{3}{5}\sum_{i=1}^n\frac{h(a_i)}{h(a_{i+1})}\geq\frac{3n}{5},$

最后一步使用均值不等式；等号条件给出 $a_1=\cdots=a_n=1$. 求最大值时，先试 $(n,0,\ldots,0)$. 可用 $\frac{f(x)}{h(y)}\leq f(x)+\frac{1}{h(y)}-1$ 求和后得到

$\sum_{i=1}^n\frac{f(a_i)}{h(a_{i+1})}\leq\sum_{i=1}^n f(a_i)+\sum_{i=1}^n\frac{1}{h(a_i)}-n.$

函数 f 与 $1/h$ 在 $[0,+\infty)$ 上均为凸函数，可用调整法把固定总和逐步移到端点，从而验证上述取法.