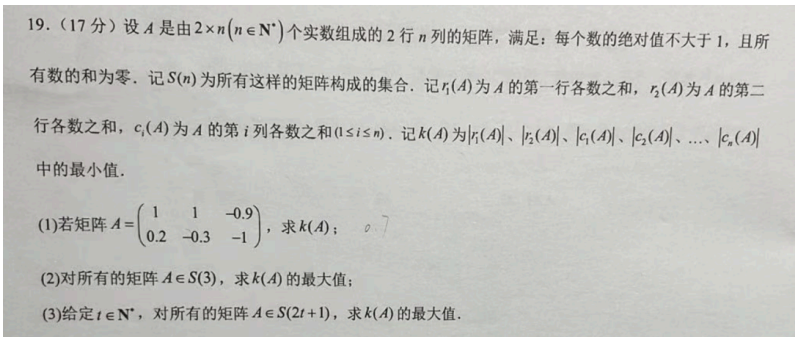
一道适合竞赛生做的新高考第 19 题

2024-04-24 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f05cabb475fb0ac2



19.（17 分）设 A 是由 $2\times n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 个实数组成的 2 行 n 列的矩阵，满足：每个数的绝对值不大于 1，且所有数的和为零．记 $S(n)$ 为所有这样的矩阵构成的集合．记 $r_1(A)$ 为 A 的第一行各数之和，$r_2(A)$ 为 A 的第二行各数之和，$c_i(A)$ 为 A 的第 i 列各数之和 $(1\le i\le n)$．记 $k(A)$ 为 $|r_1(A)|$、$|r_2(A)|$、$|c_1(A)|$、$|c_2(A)|$、…、$|c_n(A)|$ 中的最小值．

(1)若矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -0.9\\ 0.2 & -0.3 & -1\end{pmatrix}$，求 $k(A)$；

(2)对所有的矩阵 $A\in S(3)$，求 $k(A)$ 的最大值；

(3)给定 $t\in\mathbf{N}^*$，对所有的矩阵 $A\in S(2t+1)$，求 $k(A)$ 的最大值．

直接看第（3）问，即求 $2\times n$ 矩阵中每行、每列元素之和中，绝对值最小的那个的最大值.

首先是对于绝对值的处理，结合和为 0 的条件，常用方法是正负分离.

另一个典型例子是 1989 年的高联题，如下：

> 已知 $x_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2,\cdots,n,n\ge 2)$，满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$. 求证：$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{i}\right|\le\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n}$.

注意到任意交换两行（列）的所有元素，不影响条件和结论．不妨设 $r_1\ge 0\ge r_2$，$c_1\ge\cdots\ge c_k\ge 0\ge c_{k+1}\ge\cdots\ge c_n$.

(为简便书写，$r_i(A)$ 和 $c_i(A)$ 简记为 r_i 和 c_i)

不妨设 $k\ge t$（即 c_i 中非负数的个数小于非正数的个数）．否则，可将每个数均取相反数，结论不变.

于是，由

$$\begin{aligned}k(A)&=\min\{|r_1|,|r_2|,|c_1|,\cdots,|c_n|\}\\&=\min\{r_1,-r_2,c_1,\cdots,c_k,-c_{k+1},\cdots,-c_n\}\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}&(1+n-k)k(A)\\\le&r_1+(-c_{k+1})+\cdots+(-c_n)\\=&a_{1,1}+\cdots+a_{1,k}-a_{2,k+1}-\cdots-a_{2,n}\\\le&|a_{1,1}|+\cdots+|a_{1,k}|+|a_{2,k+1}|+\cdots+|a_{2,n}|\\\le&n\end{aligned}$$

于是

$$k(A) \leq \frac{n}{1+n-k} \leq \frac{2t+1}{1+2t+1-t} = \frac{2t+1}{t+2}$$

等号成立条件如下：

	1	$\cdots$	t	$t+1$	$\cdots$	$2t+1$
1	1	$\cdots$	1	$\frac{t-1}{t+2}$	$\cdots$	$\frac{t-1}{t+2}$
2	$\frac{t^2+t+1}{t^2+2t}$	$\cdots$	$\frac{t^2+t+1}{t^2+2t}$	-1	$\cdots$	-1