2021 年 Deux 数学奥林匹克

2021-09-09　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f0902301ec10e078

相关链接：2020DEUX 数学奥林匹克

第一天

1. 正实数 a，b，c，d 满足 $a+c=b+d$，且 $ab=3cd$. 求最大的常数 k，使得不等式

$$k\cdot\frac{ac+bd}{a+b-c-d}\leq\sqrt[4]{(a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2)}$$

恒成立.

2. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，垂心为 H. M 和 N 分别为边 AC 和 AB 的中点，E 和 F 分别为 B 和 C 在对边的垂足. EF 和 MN 交于点 P，NE 和 MF 交于点 T. 设 S 和 Q 分别为 OH 和 PT 的中点. 若 SQ 和 MN 交于 $\triangle APT$ 外接圆上一点 K，且 S，Q，K 在直线上顺次排列，求证：$4\cdot PH=AH$.

3. Alexia 和 Slexia 在 $2n\times 1$ 大小的瓷砖上 (从左到右依次记作 v_1，v_2，$\cdots$，v_{20}) 进行一个回合制游戏. 游戏从 Alexia 开始，每个人可以在其回合中进行如下操作之一：
   - 从某一块瓷砖 $v_i(1\leq i\leq 2n)$ 上拿走 1 枚硬币；
   - 从某一块瓷砖 v_i 上拿走 2 枚硬币，并从 v_{i-1} 和 v_{i+1} 上各自拿走 1 枚硬币 $(2\leq i\leq 2n-1)$.

   并保持瓷砖始终是“完整”的.
   “完整”状态的定义如下：
   在每一回合中，若一块瓷砖上拥有至少一枚硬币，则瓷砖为白色的 (游戏开始时所有瓷砖都是白色的). 当瓷砖上没有硬币时，瓷砖颜色变为黑色. 若所有的白瓷砖恰好为 v_a，v_{a+1}，$\cdots$，$v_b(1\leq a\leq b\leq 2n)$，或根本没有白瓷砖，则称瓷砖是“完整”的. (即含有硬币的瓷砖连续)
   在 v_1 和 v_{2n} 上各放 1 枚硬币，其余瓷砖上各放 2 枚硬币. 求所有的 n，使得 Alexia 总能进行最后一步操作，并留给 Slexia 空的 $2n\times 1$ 块瓷砖.
   (注：本题的翻译参考了印尼语版本，英文版私货过多且难以读懂.)

第二天

1. 给定正整数 $n\geq 3$ 与集合 A，B，其中集合 A，B 都是 3 维空间中 n 个不同的点构成的集合. 每分钟，Slexia 可以在集合 A 中任选两个不同的点 X，Y，然后 Slexia 将 X 绕 Y 点旋转，将旋转得到的点替换 X 放入集合 A 中. 证明：在有限的时间内，Slexia 可以将集合 A 变换为集合 B.
   (注：由于 A 为集合，在变换过程中 A 中不会有重复的点)

2. 我们称函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是" 最终满射函数 ", 当且仅当存在 $N\in\mathbb{N}$, 满足对任意的 $n\geq N$, 都存在 $m\in\mathbb{N}$, 有 $f(m)=n$. 求出所有的最终满射函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, 满足

$$f(f(a))+b\mid a^2+f(a)f(b),\ \forall a,b\in\mathbb{N}$$

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=45^\circ$, O 是其外心, L 是 BC 中点, D 是 A 在 BC 上的射影. 线段 AD 上一点 G 满足 $\angle BGC=90^\circ$, O 关于 L 的对称点为 N, 点 E, F 分别是 $\triangle ABC$ 中由 B, C 所作高的垂足, OG 与 EF 交于 H 点, AH 和圆 ABC 的另一个交点为 I, NI 和圆 ABC 的另一个交点为 K, 证明: G, K, L 三点共线.