三道 ARO 地区轮不等式问题的解答

2023-03-10　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f0b6a986e5d617c8

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

感谢王卫华老师翻译了 2023 年俄罗斯数学奥林匹克——地区轮的题目，简单做了一下三道不等式题目。

9.9求最大的实数 m，使得对所有和为 1 的正实数 a,b,c，不等式

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b}}\geqslant m$$

恒成立.

$\sum\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}=\sum\sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}}=\sum\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}$.

若可求 m_{max} 和 M_{min}，使得 $\forall a,b,c>0$，都有 $m\le\sum\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}\le M$.

令 $a=b=0$，得：$\sum\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}=1\ge m$，令 $a=b=c$，得：$\sum\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}=\frac{3}{2}\le M$.

下证：$1\le\sum\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}\le\frac{3}{2}$. 设 $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$. 则

$\sum\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}=\sum\sqrt{\frac{z^2}{(x+z)(y+z)}}\ge\sum\frac{z}{\frac{1}{2}((x+z)+(y+z))}=\sum\frac{2z}{x+y+2z}$

$\ge2\cdot\frac{(\sum z)^2}{\sum z(x+y+2z)}=2\cdot\frac{\sum x^2+2\sum xy}{2\sum x^2+2\sum xy}\ge2\cdot\frac{\sum x^2+\sum xy}{2\sum x^2+2\sum xy}=1$

$\sum\sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}}\le\sum\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)=\frac{3}{2}$. 证毕.

10.10已知 x,y,z 为正实数，证明：

$$(x-y)\sqrt{3x^2+y^2}+(y-z)\sqrt{3y^2+z^2}+(z-x)\sqrt{3z^2+x^2}\geqslant0.$$

$x\ge y$ 时，$\sqrt{3x^2+y^2}\ge\sqrt{x^2+2xy+y^2}=x+y$. 同理 $x<y$ 时，$\sqrt{3x^2+y^2}<x+y$

总之，有 $(x-y)\sqrt{3x^2+y^2}\ge x^2-y^2$. 三式相加即证.

11.9已知 a,b,c 是非零实数，证明

$$\left|\frac{b}{a}-\frac{b}{c}\right|+\left|\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right|+|bc+1|>1.$$

若 b,c 同号，则 $|bc+1|>1$. 证毕. 下面考虑 b,c 异号. 不妨设 $a>0$，$b>0$，$c<0$. 令 $d=-c$.

只需证：$\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{d}\right)+\left|\frac{d}{a}-\frac{d}{b}\right|>1$. $(a,b,d>0)$.

在 $b>a$ 或 $b>d$ 时，显然成立. 下面考虑 $b\le a$ 且 $b\le d$

$LHS=\frac{b}{a}+\frac{b}{d}+\frac{d}{b}-\frac{d}{a}=\frac{b}{a}+\frac{b}{d}+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)d\ge\frac{b}{a}+2\sqrt{\frac{b}{d}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)d}=\frac{b}{a}+2\sqrt{1-\frac{b}{a}}$

设 $t=\sqrt{1-\frac{b}{a}}\in[0,1)$，则 $\frac{b}{a}+2\sqrt{1-\frac{b}{a}}=1-t^2+2t=-(t-1)^2+2\ge-(0-1)^2+2=1$

最后一个等号成立时，$a=b$，$d\to b$ 时 $LHS=1+\frac{b}{d}>1$. 证毕.