等轴双曲线内接正三角形的面积最小值

2022-12-05　原文链接

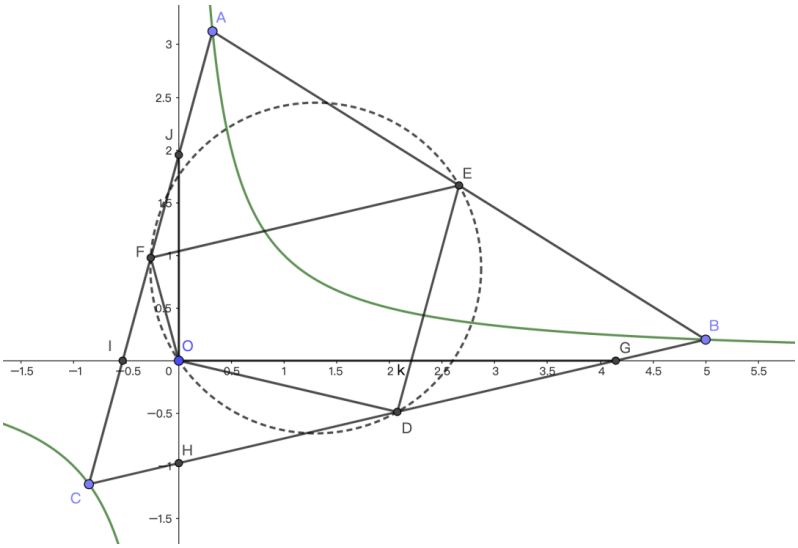
网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f0d121ab9654e813

在平面直角坐标系中，点 A，B，C 在双曲线 $xy=1$ 上，满足 $\triangle ABC$ 为等边三角形．求 $\triangle ABC$ 的面积的最小值．

注：本题改编自 2020 年高联一试第 11 题，原题为等腰直角三角形．

首先我们有一个关于等轴双曲线的熟知结论：

命题 1：等轴双曲线 $xy=m$ 上任意三点构成的三角形的九点圆（中点三角形的外接圆）过原点．



证明：如图，首先有 D 为 GH 中点．（将 BC 分别与 $xy=m$、$xy=0$ 联立，由韦达定理知 BC 中点和 GH 中点重合．也可以利用反比例函数的等面积性质，使用纯几何方法证明．）

于是 OD 为直角 $\triangle OGH$ 的斜边中线．

$\therefore \angle DOG=\angle DGO$，同理 $\angle EOJ=\angle EJO$．于是

$$\begin{aligned}\angle EOD=&\angle EOJ+\angle JOG+\angle GOD\\=&\angle EJO+90^\circ+\angle OGD\\=&90^\circ+\angle JOG-\angle C\\=&180^\circ-\angle DFE\end{aligned}$$

于是 O、D、F、E 四点共圆，证毕．

接下来证明等轴双曲线上的内接三角形满足的充要条件．

命题 2：点 A，B，C 在等轴双曲线 $xy=m$ 上，则 $\triangle ABC$ 为正三角形的充要条件为：$\triangle ABC$ 的外接圆和双曲线的第四个交点恰为 $\triangle ABC$ 外心 P 关于原点 O 的对称点．

证明：易知三角形的外接圆和九点圆关于重心位似，相似比为 $2:1$．

当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，重心、外心、九点圆心重合于三角形中心，于是由九点圆过原点知，外接圆过外心关于原点的对称点.

反之也能得到外心和九点圆心重合，于是也和重心重合，故三角形为正三角形.

回到原题.

由命题 2 可知，$\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R=\dfrac{1}{2}|OP|$，于是 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

只需求 $xy=1$ 上任意一点 $(x,\frac{1}{x})$ 到原点距离的最小值，由均值不等式知显然为 $\sqrt{2}$.

于是 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.