用正负分离解答 2026 年 8 月谜之竞赛不等式

2026-08-28　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f14986b3f35fa987

题目：

设实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足：对任意 $i, j \in 1, 2, \cdots, 100 (i, j$ 允许相同$)$, 均有 $a_i a_j \leq \max\{0, a_{i+j}\}$, 其中下标按模 100 理解. 求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}$ 的最小可能值. （李天勤供题）

解答（PDF 中已展开）

解答

答案： $-\frac{25}{2}$

构造：

$$a_i = \begin{cases} -\dfrac{1}{2}, & i \text{ 为奇数}, \\ \dfrac{1}{4}, & i \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

容易验证其满足题意.

证明：

设 $a_1, \cdots, a_{100}$ 中有 t 个为负数. 记

$\sum_{a_i>0} a_i = A, \quad \sum_{a_i<0} a_i = -B.$

$t = 0$ 时，不等式显然成立. 下设 $t > 0$.

任取一个 $a_i < 0$，则对每个 $a_j < 0$，有

$a_{i+j} \geq a_i a_j > 0.$

且这些 $i + j \pmod{100}$ 两两不同，故正项也至少有 t 个，从而 $t \leq 50$.

由

$-a_i B = \sum_{a_j<0} a_i a_j \leq \sum_{a_j<0} a_{i+j} \leq A,$

知

$\sum_{a_i<0}(-a_i B) = B^2 \leq tA.$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{100} a_i = A - B &\geq \frac{B^2}{t} - B \\ &= \frac{1}{t}\left(B - \frac{t}{2}\right)^2 - \frac{t}{4} \\ &\geq -\frac{t}{4} \geq -\frac{25}{2}.\end{aligned}$$