2024 年巴西复仇赛

2024-01-30 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f1ceb1e3118b9ddf

2024 年巴西复仇赛

程国根 译

1. 设 $M,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，其中 $M>0$，$\alpha,\beta\in(0,1)$. 若实数 $R>1$，称正实数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$ 是**犀牛**数列，如果对任意 $n\geq 1$，都有 $\sum_{i=1}^{n} R^{n-i}C_i \leq R^n\cdot M$. 求最小的实数 $R>1$，使得存在一个犀牛数列 $\{C_n\}_{n\geq 0}$，其满足 $\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n C_n^{\alpha}$ 发散.

2. Davi 和 George 正在福塔莱萨进行城市游览，最初由 Davi 带队. 福塔莱萨的布局就像一个 $n\times n$ 的网格. 他们从网格中的一个方格开始，可以通过一条街道从一个方格移动到另一个相邻的方格（网格上每一对相邻的方格，都有一条街道将它们连接起来）. 有些街道很危险. 如果 Davi 或 George 通过了危险的街道，他们就会感到害怕，然后换另一个人带队继续游览城市. 他们的目标是恰好通过福塔莱萨的每个区域各一次. 但是，如果结束城市游览时是 George 带队，那么全世界都会失业，所有人都会饿死. 已知至少一条街道是没有危险的，证明：Davi 和 George 可以实现他们的目标，而不会让所有人都饿死.

3. 设 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内接于圆 O，P,Q 为它的一对等角共轭点（即对任意 i，都有 $\angle PA_{i+1}A_i=\angle QA_{i+1}A_{i+2}$，下标模 n 理解）. 设 P_i 为 $\triangle PA_iA_{i+1}$ 的外心，Q_i 为 $\triangle QA_iA_{i+1}$ 的外心. 求证：

(1) $P_1P_2\cdots P_n$ 和 $Q_1Q_2\cdots Q_n$ 均为圆内接 n 边形，并设圆心分别为 O_P,O_Q.

(2) O,O_P,O_Q 三点共线.

(3) $O_PO_Q\parallel PQ$.

4. 求所有正整数 n，使得 $2n=(\varphi(n))^{\frac{3}{3}}\left((\varphi(n))^{\frac{3}{3}}+1\right)$.

5. Régis、Ed 和 Rafael 去参加 IMO. 他们将在巴斯进行一场比赛，城市里有 2^n 座房子. Régis 和 Ed 将组队对抗 Rafael. 游戏规则如下：首先，Régis 和 Ed 想出一个策略，然后让 Rafael 知道. 之后，Régis 和 Ed 不再交流，游戏开始. Rafael 决定参观房子的顺序，然后开始按顺序带 Régis 参观房子. 除最后一座房子外，在每座房子里，Régis 都会选择一个介于 1 和 n 之间的数字，并把它放在房子里. 在最后一座房子里，Rafael 从 1 到 n 之间选择一个数字，并把它放在房子里.

之后，Ed 会看到所有的房子和房子里的数字，他必须猜出 Rafael 把数字放在了哪个房子里. Ed 有 k 次猜测的机会. Ed 和 Régis 有一种策略可以确保 Ed 正确猜出 Rafael 把数字放在哪间房子里，那么最小的 k 是多少?

1

2024 年巴西复仇赛

程国根 译

1. 设 $M,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，其中 $M>0$，$\alpha,\beta\in(0,1)$. 若实数 $R>1$，称正实数列 $\{C_n\}_{n\ge 0}$是**犀牛**数列，如果对任意 $n\ge 1$，都有 $\sum\limits_{i=1}^{n}R^{n-i}C_i\le R^n\cdot M$. 求最小的实数 $R>1$，使得存在一个犀牛数列 $\{C_n\}_{n\ge 0}$,其满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta^n C_n^{\alpha}$发散.

2. Davi 和 George 正在福塔莱萨进行城市游览，最初由 Davi 带队. 福塔莱萨的布局就像一个 $n\times n$的网格. 他们从网格中的一个方格开始，可以通过一条街道从一个方格移动到另一个相邻的方格（网格上每一对相邻的方格，都有一条街道将它们连接起来）. 有些街道很危险. 如

果 Davi 或 George 通过了危险的街道，他们就会感到害怕，然后换另一个人带队继续游览城市. 他们的目标是恰好通过福塔莱萨的每个区域各一次. 但是，如果结束城市游览时是 George 带队，那么全世界都会失业，所有人都会饿死. 已知至少一条街道是没有危险的，证明：Davi 和 George 可以实现他们的目标，而不会让所有人都饿死.

3. 设 n边形 $A_{1}A_{2}\cdots A_{n}$内接于圆 O，P,Q为它的一对等角共轭点（即对任意 i，都有 $\angle PA_{i+1}A_{i}=\angle QA_{i+1}A_{i+2}$，下标模 n理解）. 设 P_{i}为 $\triangle PA_{i}A_{i+1}$的外心，Q_{i}为 $\triangle QA_{i}A_{i+1}$的外心. 求证：

1. $P_{1}P_{2}\cdots P_{n}$和 $Q_{1}Q_{2}\cdots Q_{n}$均为圆内接 n边形，并设圆心分别为 O_{P},O_{Q}.
2. O,O_{P},O_{Q}三点共线.
3. $O_{P}O_{Q}\parallel PQ$.

4. 求所有正整数 n，使得 $2n=(\varphi(n))^{\frac{2}{3}}\left((\varphi(n))^{\frac{2}{3}}+1\right)$.

5. Régis、Ed 和 Rafael 去参加 IMO. 他们将在巴斯进行一场比赛，城市里有 2^n座房子. Régis 和 Ed 将组队对抗 Rafael. 游戏规则如下：首先，Régis 和 Ed 想出一个策略，然后让 Rafael 知道. 之后，Régis 和 Ed 不再交流，游戏开始. Rafael 决定参观房子的顺序，然后开始按顺序带 Régis 参观房子. 除最后一座房子外，在每座房子里，Régis 都会选择一个介于 1和 n之间的数字，并把它放在房子里. 在最后一座房子里，Rafael 从 1到 n之间选择一个数字，并把它放在房子里. 之后，Ed 会看到所有的房子和房子里的数字，他必须猜出 Rafael 把数字放在了哪个房子里. Ed 有 k次猜测的机会. Ed 和 Régis 有一种策略可以确保 Ed 正确猜出 Rafael 把数字放在哪间房子里，那么最小的 k是多少?

解答（PDF 中已展开）

\section*{2024年巴西复仇赛}\begin{flushright} 程国根\quad 译\end{flushright}\ex 设$M,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，其中$M>0$，
↪ $\alpha,\beta\in(0,1)$. 若实数$R>1$，称正实数列$\{C_{n}\}_{n\ge 0}$是\textbf{犀牛}数列，如果对任意$n\ge 1$，
↪ 都有$\sum\limits_{i=1}^{n}R^{n-i}C_{i}\le R^{n}\cdot M$. 求最小的实数$R>1$，使得存在一个犀牛数列$\{C_{n}\}_{n\ge 0}$，
↪ 其满足$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta^{n}C_{n}^{\alpha}$发散. \vfill\ex Davi和George正在福塔莱萨进行城市游览，
↪ 最初由Davi带队. 福塔莱萨的布局就像一个$n\times n$的网格. 他们从网格中的一个方格开始，
↪ 可以通过一条街道从一个方格移动到另一个相邻的方格（网格上每一对相邻的方格，都有一条街道将它们连接起来）.
↪ 有些街道很危险. 如果Davi或George通过了危险的街道，他们就会感到害怕，然后换另一个人带队继续游览城市.
↪ 他们的目标是恰好通过福塔莱萨的每个区域各一次. 但是，如果结束城市游览时是George带队，那么全世界都会失业，
↪ 所有人都会饿死. 已知至少一条街道是没有危险的，证明：Davi和George可以实现他们的目标，而不会让所有人都饿死.
↪ \vfill\ex 设n边形$A_{1}A_{2}\cdots A_{n}$内接于圆O，P,Q为它的一对等角共轭点（即对任意i，都有$\angle
↪ PA_{i+1}A_{i}=\angle QA_{i+1}A_{i+2}$，下标模$n$理解）. 设$P_{i}$为$\triangle PA_{i}A_{i+1}$的外心，$Q_{i}$为$\triangle
↪ QA_{i}A_{i+1}$的外心. 求证：\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item $P_{1}P_{2}\cdots P_{n}$和$Q_{1}Q_{2}\cdots
↪ Q_{n}$均为圆内接$n$边形，并设圆心分别为$O_{P},O_{Q}$. \item O,O_{P},O_{Q}三点共线. \item $O_{P}O_{Q}\parallel
↪ PQ$. \end{enumerate}\vfill\ex 求所有正整数n，使得$2n=(\varphi(n))^{\frac{2}{3}}\left((\varphi(n))^{\frac{2}{3}}+1\right)$.
↪ \vfill\ex Régis、Ed和Rafael去参加IMO. 他们将在巴斯进行一场比赛，城市里有2^n座房子. Régis和Ed将组队对抗Rafael.
↪ 游戏规则如下：首先，Régis和Ed想出一个策略，然后让Rafael知道. 之后，Régis和Ed不再交流，游戏开始.
↪ Rafael决定参观房子的顺序，然后开始按顺序带Régis参观房子. 除最后一座房子外，在每座房子里，
↪ Régis都会选择一个介于1和n之间的数字，并把它放在房子里. 在最后一座房子里，Rafael从1到n之间选择一个数字，
↪ 并把它放在房子里.
之后，Ed会看到所有的房子和房子里的数字，他必须猜出Rafael把数字放在了哪个房子里. Ed有k次猜测的机会.
↪ Ed和Régis有一种策略可以确保Ed正确猜出Rafael把数字放在哪间房子里，那么最小的k是多少？\vfill