2023TMO 代数题解答

2023-02-10 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f242280f4d1e6d0f

感谢王卫华老师翻译了 2023 台湾数学奥林匹克（TMO）试题，这里给出第四题的证明.

题目：

m 为正整数，实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足：

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i = 1,$$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i^2 = 11,$$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i^3 = 1,$$

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i^4 = 131.$$

解答（PDF 中已展开）

证明：m 是 7 的倍数.

分析：

本题方程个数少于未知数个数，考虑使用不等式证明方程组的解恰为不等式的取等条件.

首先取 $m = 7$，尝试求出方程的一组解.

考察方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{7} a_i = 7 \\ \sum\limits_{i=1}^{7} a_i^2 = 77 \\ \sum\limits_{i=1}^{7} a_i^3 = 7 \\ \sum\limits_{i=1}^{7} a_i^4 = 917 \end{cases}$$

显然 a_i 不全相等，下面考虑其中有两个不同的取值，即有 n 个 a，$7-n$ 个 b，$a \neq b$. 方程组变为：

$$\begin{cases} n\cdot a+(7-n)\cdot b=7 \\ n\cdot a^2+(7-n)\cdot b^2=77 \\ n\cdot a^3+(7-n)\cdot b^3=7 \\ n\cdot a^4+(7-n)\cdot b^4=917 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (a-b)n=7-7b \\ (a^2-b^2)n=77-7b^2 \\ (a^3-b^3)n=7-7b^3 \\ (a^4-b^4)n=917-7b^4 \end{cases}$$

由 $a\neq b$ 得:

$$\frac{1-b}{a-b}=\frac{11-b^2}{a^2-b^2}=\frac{1-b^3}{a^3-b^3}=\frac{91-b^4}{a^4-b^4}$$

容易求出 $(a,b)=(3,-4)$ 或 $(-4,3)$.

下面利用平方的非负性来证明，方程组成立时，a_i 只能取 -4 或 3.

证明:

考虑 $f=\sum\limits_{i=1}^{m}(a_i+4)^2(a_i-3)^2$. 首先 $f\geq 0$.

而

$$\begin{aligned} f=&\sum_{i=1}^{m}(a_i+4)^2(a_i-3)^2 \\ =&\sum_{i=1}^{m}a_i^4+2\sum_{i=1}^{m}a_i^3-23\sum_{i=1}^{m}a_i^2-24\sum_{i=1}^{m}a_i+\sum_{i=1}^{m}144 \\ =&131m+2\cdot m-23\cdot 11m-24\cdot m+144m \\ =&0 \end{aligned}$$

于是，方程组成立时，a_i 只能取 -4 或 3. 设其中有 n 个 -4，$m-n$ 个 3，则

$$m=\sum_{i=1}^{m}a_i=-4n+3(m-n)$$

即 $2m-7n=0$，于是 $7\mid m$，证毕.