2023 年中国台湾 IMOC 数论组

2023-09-19　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f3077f0206f5cf07

每年，我国台湾的前 IMO 参赛者组成的小团体都会举办一个夏令营，讲解知识和技巧，还有 8 次模拟考试。从 2017 年开始，他们取消了模拟考试，用若干练习题来取代。下面就是 2023 年夏令营的 IMOC 练习题。

2023 年中国台湾 IMOC 代数组——中文翻译

2023 年中国台湾 IMOC

程国根　译

数论组

1. 求所有正整数 k，满足：存在有限个正整数 n，使得 $xn+1 \mid n^2+kn+1$ 的正整数解 x 不唯一.

2. 求所有正整数对 (a,b)，使得 $a^b+b^a=a!+b^2+ab+1$.

3. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意正整数 a，b，都有

$$f(a)+f(b)+ab \mid a^2f(a)+b^2f(b)+f(a)f(b).$$

4. 求所有函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意正整数 a，b，$af(a)^3+2abf(a)+bf(b)$ 都是一个完全平方数.

5. 设 $p=4k+1$ 为素数，$|x|\le\dfrac{p-1}{2}$ 满足 $\dbinom{2k}{k}\equiv x \pmod p$. 求证：$|x|\le 2\sqrt{p}$.

6. 记 $S(b)$ 为满足 $3b-1=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 和 $b^2+1=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_9^2$ 的九元有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$ 的个数. 求证：对任意 $\varepsilon>0$，都存在 $C_\varepsilon>0$，使得 $S(b)\le C_\varepsilon b^{3+\varepsilon}$.

3

2023 年中国台湾 IMOC

程国根　译

数论组

1. 求所有正整数 k，满足：存在有限个正整数 n，使得 $xn+1\mid n^{2}+kn+1$的正整数解 x不唯一.

2. 求所有正整数对 (a,b)，使得 $a^{b}+b^{a}=a!+b^{2}+ab+1$.

3. 求所有函数 f：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意正整数 a，b，都有 $$f(a)+f(b)+ab \mid a^2f(a)+b^2f(b)+f(a)f(b).$$

4. 求所有函数 f：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意正整数 a，b，$af(a)^3+2abf(a)+bf(b)$都是一个完全平方数.

5. 设 $p=4k+1$为素数，$|x|\le\dfrac{p-1}{2}$满足 $\binom{2k}{k}\equiv x \pmod p$. 求证：$|x|\le 2\sqrt{p}$.

6. 记 $S(b)$为满足 $3b-1=a_{1}+a_{2}+\cdots+a_{n}$和 $b^{2}+1=a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+\cdots+a_{9}^{2}$的九元有序数组 $(a_{1},a_{2},\cdots,a_{9})$的个数. 求证：对任意 $\varepsilon>0$，都存在 $C_{\varepsilon}>0$，使得 $S(b)\le C_{\varepsilon}b^{3+\varepsilon}$.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023年中国台湾IMOC}\flushright 程国根\quad 译\section*{数论组}\setcounter{ex}{0}\ex 求所有正整数$k$，满足：
↪ 存在有限个正整数$n$，使得$xn+1\mid n^{2}+kn+1$的正整数解$x$不唯一. \vfill\ex 求所有正整数对$(a,b)$，
↪ 使得$a^{b}+b^{a}=a!+b^{2}+ab+1$. \vfill\ex 求所有函数$f$：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得对任意正整数$a$，$b$，
↪ 都有$$f(a)+f(b)+ab \mid a^2f(a)+b^2f(b)+f(a)f(b).$$\vfill\ex 求所有函数$f$：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，
↪ 使得对任意正整数$a$，$b$，$af(a)^3+2abf(a)+bf(b)$都是一个完全平方数. \vfill\ex 设$p=4k+1$为素数，
↪ $|x|\le\dfrac{p-1}{2}$满足$\binom{2k}{k}\equiv x \pmod p$. 求证：$|x|\le 2\sqrt{p}$. \vfill\ex 记$S(b)$为满足$3b-1=a_{1}+a_」
↪ {2}+\cdots+a_{n}$和$b^{2}+1=a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+\cdots+a_{9}^{2}$的九元有序数组$(a_{1},a_{2},\cdots,a_{9})$的个数.
↪ 求证：对任意$\varepsilon>0$，都存在$C_{\varepsilon}>0$，使得$S(b)\le C_{\varepsilon}b^{3+\varepsilon}$. \vfill
```