听说这道高考模拟题有二试难度？

2025-02-22　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f39a30c942333d14

19. (17 分)

已知集合 $M=\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n\}$，$n\in\mathbf{N}^*$，设函数 $f_n(x)=\sin^2(x-\theta_1)+\sin^2(x-\theta_2)+\cdots+\sin^2(x-\theta_n)$.

(1) 当 $M=\left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ 和 $\left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$ 时，分别判断函数 $f_2(x)$ 是否是常数函数？说明理由；

(2) 已知 $M\subseteq\left\{\theta\mid\theta=\frac{k\pi}{12}, k\in\mathbf{N}, k\leqslant 12\right\}$，求函数 $f_3(x)$ 是常数函数的概率；

(3) 写出函数 $f_n(x)$ $(n\geqslant 2)$ 是常数函数的一个充分条件，并说明理由.

(题源：2025 届广东省二调)

在朋友圈看到有老师说：本题的第 3 小问如果改成求充要条件，有高联二试的难度。

不过这个是我给学生讲一试的一个题目时，都会讲到的推广。所以我认为难度也就在一试第 10 题左右吧。

下面是解答：

$$\begin{aligned}
f(x)&=\sum_{k=1}^{n}\sin^2(x-\theta_k)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos(2x-2\theta_k)}{2}\\
&=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2x\sum_{k=1}^{n}\cos 2\theta_k+\sin 2x\sum_{k=1}^{n}\sin 2\theta_k)\\
&=\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(\sum_{k=1}^{n}\cos 2\theta_k)^2+(\sum_{k=1}^{n}\sin 2\theta_k)^2}\cdot\sin(2x+\varphi)
\end{aligned}$$

反之，若 $g(x)$ 的全体复根均在单位圆上，且满足 (*)，则这些根所对应的 θ_k 也满足题意，此即为充要条件.

结尾再吐槽一句，“求充要条件” 或者 “求充分条件” 这种问法很不好，理论上我把原条件再抄一遍也是正确的。。