两道不等式问题

2021-03-31 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f58b837402a8b932

原文是图片版（公式与题面都在图里）；上面这段文字由本站按配套 LaTeX 文库的.tex 源码逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏。它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1.（2000 年澳门数学奥林匹克） 设正实数 a,b,c 满足 $abc=1$，求证：

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le 1.$$

证明 设 $a=x^3$，$b=y^3$，$c=z^3$，则 $abc=x^3y^3z^3=1$，即 $xyz=1$.

于是 $\frac{1}{a+b+1}=\frac{xyz}{x^3+y^3+xyz}\le\frac{xyz}{x^2y+xy^2+xyz}=\frac{z}{x+y+z}$.

同理有 $\frac{1}{b+c+1}\le\frac{x}{x+y+z}$，$\frac{1}{c+a+1}\le\frac{y}{x+y+z}$，三式相加即证.

恩次方根

2.（2018 年波罗的海地区数学奥林匹克） 设正实数 a,b,c,d 满足 $abcd=1$，求证：

$$\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}}\le 1.$$

证明 由 Cauchy 不等式知 $\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}}\le\sqrt{\sum_{cyc}\frac{4}{a+2b+3c+10}}$.

故只需证明 $\sum_{cyc}\frac{4}{a+2b+3c+10}\le 1$.

设 $a=x^4$，$b=y^4$，$c=z^4$，$d=w^4$，则 $\frac{4}{a+2b+3c+10}=\frac{4}{x^4+2y^4+3z^4+10}$.

由均值不等式：$x^4+2y^4+3z^4+10=(x^4+y^4+z^4+1)+(y^4+z^4+1+1)+(z^4+1+1+1)+4\ge 4(xyz+yz+z+1)$.

故 $\sum_{cyc}\frac{4}{x^4+2y^4+3z^4+10}\le\sum_{cyc}\frac{1}{xyz+yz+z+1}=1$，证毕.

恩次方根

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 1.（2000 年澳门数学奥林匹克）设正实数 a,b,c 满足 $abc=1$，求证：$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le 1$. 证明：设 $a=x^3$，$b=y^3$，$c=z^3$，则 $abc=x^3y^3z^3=1$，即 $xyz=1$. 于是 $\frac{1}{a+b+1}=\frac{xyz}{x^3+y^3+xyz}\le\frac{xyz}{x^2y+xy^2+xyz}=\frac{z}{x+y+z}$. 同理有 $\frac{1}{b+c+1}\le\frac{x}{x+y+z}$，$\frac{1}{c+a+1}\le\frac{y}{x+y+z}$，三式相加即证.
2. 2.（2018 年波罗的海地区数学奥林匹克）设正实数 a,b,c,d 满足 $abcd=1$，求证：$\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}}\le 1$. 证明：由 Cauchy 不等式知 $\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a+2b+3c+10}}\le\sqrt{\sum_{cyc}\frac{4}{a+2b+3c+10}}$. 故只需证明 $\sum_{cyc}\frac{4}{a+2b+3c+10}\le 1$. 设 $a=x^4$，$b=y^4$，$c=z^4$，$

d=w^4$, 则 $\frac{4}{a+2b+3c+10}=\frac{4}{x^4+2y^4+3z^4+10}$. 由均值不等式: $x^4+2y^4+3z^4+10=(x^4+y^4+z^4+1)+(y^4+z^4+1+1)+(z^4+1+1+1)+4\ge 4(xyz+yz+z+1)$. 故 $\sum_{cyc}\frac{4}{x^4+2y^4+3z^4+10}\le\sum_{cyc}\frac{1}{xyz+yz+z+1}=1$，证毕.