Mathematical Reflections 2022 年第四期征解题

2022-09-02 原文链接

网站版本 3f6bf801342b · 文章 ID h_f6e5ba60c4f88303

Junior Problems

J595. 解方程:

$$\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{2(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x-7)^2}=\sqrt[3]{4x}$$

J596. 设 x，y 为正实数. 求证:

$$\frac{1}{2x+y}+\frac{x}{y+2}+\frac{y}{x+y+1}\geq 1$$

J597. 设 a，b，c 为正实数，且满足

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=2$$

求证:

$$\frac{5}{3}\leq\frac{a+b+c}{\max(a,b,c)}\leq 2$$

J598. 求不定方程

$$(x^2-y^2)^2-23y=8$$

的整数解.

J599. 设 a，b，c 为正实数. 求证:

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geq 3abc\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{a}{c}}\right)$$

J600.$\triangle ABC$ 的三边分别为 a，b，c. r 为内切圆半径，R 为外接圆半径. 求证:

$$\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\geq 4-\frac{2r}{R}$$

Senior Problems

S595. 求所有三元实数组 (x,y,z)，使得

$$\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{16+y}=\sqrt[4]{1-y}+\sqrt[4]{16+z}=\sqrt[4]{1-z}+\sqrt[4]{16+x}=3$$

S596.$\triangle ABC$ 的三边分别为 a，b，c. 求证:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

S597. 实数 a，b，c，$d\geq -1$ 满足 $a^3+b^3+c^3+d^3=0$. 求 $a+b+c+d$ 的最大值.

S598.$\triangle ABC$ 的三边分别为 a，b，c. Δ 为面积. 求证:

$$(a^2+b^2+c^2)^6\geq(4\sqrt{3}\Delta)^6+(2a^2-b^2-c^2)^6$$

S599.$ABCD$ 为平行四边形．$\triangle BCD$ 的外接圆在点 C 处的切线交 AB 于点 E，交 AD 于点 F．$\triangle AEF$ 的外接圆在点 E 和点 F 处的切线交于点 X．求证：A，C，X 三点共线．

S600. 设 a，b，c 为正实数．求证：

$$\frac{8a}{3b^2+2bc+3c^2}+\frac{8b}{3c^2+2ca+3a^2}+\frac{8c}{3a^2+2ab+3b^2}\geq\frac{9}{a+b+c}$$

Undergraduate Problems

U595. 求所有 $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的非常数函数 f，使得：
(i) 对任意 x，$y\in\mathbb{R}$，有 $f(x)f(y+1)=f(x+1)f(y)$；
(ii)f 在每个区间 $[a,b]\subset\mathbb{R}$ 上可积．

U596. 设 p 为素数．记 N_p 为满足 a，b，$c\in\{0,1,\cdots,p-1\}$ 且

$a^3+b^3+c^3\equiv 3abc\pmod p$ 的三元数组 (a,b,c) 的个数．求所有素数 p，使得 $N_p>p^2+p$．

U597. 计算：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}-\cdots\right)^2$$

U598. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=90^\circ$，F 为费尔巴哈点，O 为外心．若 $AF=OF$，求 $\angle ABC$．

U599. 计算：

$$\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}dx$$

U600. 称一个正整数 k 是“好的”，如果存在非常数多项式 $P(x)$ 使得

$$P(n^k)=P(n)P(n-1)\cdots P(n-k+1)$$

对任意正整数 n 恒成立．求所有“好的”正整数 k．

Olympiad Problems

O595. 由一些大于 1 的整数组成的集合 A 满足：对 A 中任意 n 个（$n\geq 2$）互异的元素 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$a_1a_2\cdots a_n-1$ 的所有大于 1 的约数都在 A 中．假设 A 中至少含有两个元素，求证：A 包含所有大于 1 的整数．

O596. 实数 a，b，c 满足 $a\geq b\geq c\geq 0$，且 $a^2+b^2+c^2=3$．求证：

$$\sqrt{3abc(a+b+c)}+2(a-c)^2\geq 3$$

O597.ABC 为三角形，x，y，z 为正实数．求证：

$$4+\frac{r}{R}+\frac{x}{y+x}(1+\cos A)+\frac{x}{y+z}(1+\cos A)+\frac{y}{z+x}(1+\cos B)+\frac{z}{x+y}(1+\cos C)$$
$$\geq(\sin A+\sin B+\sin C)^2$$

O598. 实数 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=n-1$$

求证：

$$a_1^3+a_2^3+\cdots+a_n^3\leq n+1-\frac{6n-4}{n^2}$$

并求出等号成立条件.

O599. 一所学校有 n 个孩子，将所有孩子分成大小不一的团体，使得没有任何孩子独自一人. 接下来，所有孩子一起去公园，令他们围坐在圆桌旁，每组围着一张桌子. 求所有可能的排法总数.（写成关于 n 的封闭表达式）

即：将 n 个孩子分成若干组，再对每组进行圆排列.

O600. 在任意 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$\frac{\sin A}{1+\cos^2 B+\cos^2 C}+\frac{\sin B}{1+\cos^2 C+\cos^2 A}+\frac{\sin C}{1+\cos^2 A+\cos^2 B}\leq\sqrt{3}$$