2023 年莫斯科数学奥林匹克砝码题解答

2023-07-02　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f6e5f616caed1f8f

感谢苏淳教授的翻译，这里写一下十一年级组最后两题我的解答。

> 今有一架绝对精准的双盘天平和 50 个砝码，这些砝码的重量分别为 $\arctan 1, \arctan\frac{1}{2}, \arctan\frac{1}{3}, \cdots, \arctan\frac{1}{50}$. 证明：可以从中选出 10 个砝码，每端放 5 个，使得天平平衡.

解答（PDF 中已展开）

证明：

熟知 $\arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$，现在我们找更多类似式子.

若正整数 a, b, c 满足

$$\arctan\frac{1}{a} = \arctan\frac{1}{b} + \arctan\frac{1}{c}$$

则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} &= \tan\left(\arctan\frac{1}{b} + \arctan\frac{1}{c}\right)\\ &= \frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{1-\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}} = \frac{b+c}{bc-1}\end{aligned}$$

即 $(b-a)(c-a) = a^2+1$. 下面对 a 枚举：

$a=1$ 时，$(b-1)(c-1)=2$，$b=2$，$c=3$；

$a=2$ 时，$(b-2)(c-2)=5$，$b=3$，$c=7$；

$a=3$ 时，$(b-3)(c-3)=10$，$b=4$，$c=13$ 或 $b=5$，$c=8$；

$a=4$ 时，$(b-4)(c-4)=17$，$b=5$，$c=21$；

$a=5$ 时，$(b-5)(c-5)=26$，$b=6$，$c=31$ 或 $b=7$，$c=18$.

由上可得：

$$\arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

$$\arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{21} = \arctan\frac{1}{4}$$

$$\arctan\frac{1}{6} + \arctan\frac{1}{31} = \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{18}$$

将上面三式左右两边的数分别作为天平两端的砝码重量即可.

分别以 B,P,T 表示凸多面体的顶点数目，棱数和具有公共顶点的三角形面的最大数目．证明：$B\sqrt{P+T}\geq 2P$.

例如在四面体中，$B=4$，$P=6$，$T=3$，满足等式；而对三棱柱（$B=6$，$P=9$，$T=1$）和立方体（$B=8$，$P=12$，$T=0$）则成立严格不等式.

解答（PDF 中已展开）

证明：

考虑凸多面体的一个顶点 A_1，设其度数为 n_1，再设与其相邻的顶点分别为 $C_1,C_2,\cdots,C_{n_1}$，它们的度分别为 $d_1,d_2,\cdots,d_{n_1}$.

考虑有公共顶点 A_1 的三角形面，每个面除 A_1 外，还有 C_i 和 C_j（$1\leq i<j\leq n_1$）两个顶点，计算 C_i 和 C_j 的度时，边 C_iC_j 会重复计算一次，其余边不重复，故可以由此对三角形面数 T 进行计数．我们有

$$d_1+d_2+\cdots+d_{n_1}\leq P+T(A_1)\leq P+T$$

其中 $T(A_1)$ 为有公共顶点 A_1 的三角形面数.

由均值不等式：

$$\sum_{k=1}^{n_1}\sqrt{d_k}\leq\sqrt{n_1\sum_{k=1}^{n_1}d_k}\leq\sqrt{n_1(P+T)}$$

即

$$\sqrt{P+T}\geq\sum_{k=1}^{n_1}\sqrt{\frac{d_k}{n_1}}$$

将上面的顶点 A_1 改为凸多边形的任意一个顶点 A_i（$i=1,2\cdots,B$），共得到 B 个不等式，并将这 B 个不等式全部相加得：

$$\begin{aligned}&B\sqrt{P+T}\\ \geq&\sum_{i=1}^{B}\sum_{k=1}^{n_i}\sqrt{\frac{d_k}{n_i}}\\ =&\sum_{A_iA_j\text{相邻}}\left(\sqrt{\frac{n_i}{n_j}}+\sqrt{\frac{n_j}{n_i}}\right)\\ \geq&2P\end{aligned}$$