丘成桐数学零试第 1 题及类似一题

2021-09-06 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f8cc2bb013d5777a

2021 年 9 月 4 日的清华大学丘成桐数学零试第一题如下：(完整试题及解析见：【修订版】丘成桐数学零试完整试题 & 解析发布！内附猿辅导独家试题评析)

题目：

$$\sum_{k=0}^{8}(-1)^k\binom{8}{k}k^8$$

的值为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： 40320.

此类问题一般可以用递推来计算，也可以通过寻找组合意义，用算两次的方法解决.（考虑由 1，2，$\cdots$，8 组成的八位数个数，要求每个数字均出现)

本题让我想到一道类似的组合数求值问题，但难度更大：

题目： 计算：

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\frac{1}{r}$$

方法一： 本题答案为调和级数

$$H_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

考虑如下组合问题：

> $\pi(1)$，$\pi(2)$，$\cdots$，$\pi(n)$ 为 1，2，$\cdots$，n 的任意一个排列，称 i 优于 j 当且仅当 $i>j$，且 $\pi(i)>\pi(j)$. 求 i 的个数的数学期望，满足不存在 j 使得 i 优于 j.

解答（PDF 中已展开）

1. 答案为 H_n.
   若 $\pi(n)\neq 1$，则 n 优于 $\pi^{-1}(1)$.
   而 $\pi(n)=1$ 时，n 不优于任何数.
   于是 $E_n=E_{n-1}+\dfrac{1}{n}$，结合 $E_1=1$ 知 $E_n=H_n$.
2. 答案为 $\sum\limits_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\dfrac{1}{r}$.
   用容斥原理进行计算.

首先假设每个数均符合题意.

对于任意二元数组 $\{i,j\}$，$i>j$，有 $\frac{1}{2}$ 的概率 $\pi(i)>\pi(j)$，即 i 优于 j，此时的 i 不满足题意.

对于任意三元数组 $\{i,j,k\}$，其中 i 为最大数，若 $\pi(i)>\pi(j)$，且 $\pi(i)>\pi(k)$，此情况已在二元数组的讨论中被计算 2 次，而其发生的概率为 $\frac{1}{3}$(对 $\pi(i)$，$\pi(j)$，$\pi(k)$ 排序后，$\pi(i)$ 最大)

……

由容斥原理即得：$E_n=\sum\limits_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\frac{1}{r}$. \

因此

$$\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\frac{1}{r}=H_n$$

方法二： 考虑 $n-1$ 次多项式 $P(x)$，满足对任意 $k=1,2,\cdots,n$，都有 $P(k)=\frac{1}{k}$. 由拉格朗日插值公式知，这样的多项式 $P(x)$ 存在. 于是 1，2，$\cdots$，n 为方程 $xP(x)-1=0$ 的 n 个根. 即

$$xP(x)-1=a(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

其中 a 为常数.

等式左侧的常数项为 -1，右侧的常数项为 $a(-1)^n n!$，于是 $a(-1)^n n!=-1$，即

$$a=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

等式右侧的一次项系数为

$$\begin{aligned}&a(-1)^{n-1}\left(\frac{n!}{1}+\frac{n!}{2}+\cdots+\frac{n!}{n}\right)\\=&\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\end{aligned}$$

等式左侧的一次项系数为 $P(0)$.

于是

$$P(0)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=H(n)$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r-1}\binom{n}{r}\frac{1}{r}\\=&P(0)-(-1)^n\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}\binom{n}{r}P(r)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= H(n) - (-1)^n \Delta^n P(0) \\
&= H(n)
\end{aligned}
$$

最后一步是因为 $P(x)$ 为 $n-1$ 次多项式，其 n 阶差分为 0.