证明 n 倍角的余弦值不可能为单位分数

2023-09-25 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_f91f0bf0324f493d

问题. 已知 p 为奇素数，$\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$，满足 $\cos\alpha = \frac{1}{p}$. 求证：对任意大于 1 的整数 n，均不存在正整数 m，使得 $\cos n\alpha = \frac{1}{m}$.

证明 假设结论不成立，即存在正整数 $n > 1$ 和 m，使得 $\cos n\alpha = \frac{1}{m}$. 由

$$e^{\mathrm{i}\cdot(\pm\alpha)} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha = \frac{1}{p} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}$$

知：

$$e^{\mathrm{i}\cdot(\pm n\alpha)} = \cos n\alpha \pm \mathrm{i}\sin n\alpha = \left(\frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{p^2-1}}{p}\right)^n$$

于是

$$\begin{aligned}\cos n\alpha =& \frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{p^2-1})^n + (1-\mathrm{i}\sqrt{p^2-1})^n}{2p^n} \\ =& \frac{\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k (p^2-1)^k \mathrm{C}_n^{2k}}{p^n} = \frac{1}{m}\end{aligned}$$

由于 p 是素数，必存在正整数 $l \le n$，使得 $m = p^l$，$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k (p^2-1)^k \mathrm{C}_n^{2k} = p^{n-l}$. 注意到

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k (p^2-1)^k \mathrm{C}_n^{2k} \equiv \sum_{k=0}^{[n/2]} \mathrm{C}_n^{2k} = 2^{n-1} \pmod{p}$$

若 $l<n$，则必有 $p\mid 2$，于是 $p=2$，这与 p 是奇素数矛盾，因此 $l=n$. 此时有

$$\sum_{k=0}^{[n/2]-1}(-1)^k(p^2-1)^k\mathrm{C}_n^{2k+2}=0$$

考虑左边 2 的幂次. 于是设 $v_2(p^2-1)=a$，$v_2(n(n-1))=b$. 由 p 为奇数知 $a\geq 3$.

于是对任意 $k\geq 1$，都有

$$\begin{aligned}&v_2\left((p^2-1)^k\mathrm{C}_n^{2k+2}\right)=v_2((p^2-1)^k)+v_2(\mathrm{C}_n^{2k+2})\\=&ak+v_2(n(n-1)\cdots(n-2k-1))-v_2((2k+2)!)\\\geq&ak+b-v_2((2k+2)!)\end{aligned}$$

由 Legendre 定理，$v_2((2k+2)!)=2k+2-S_2(2k+2)$，其中 $S_2(n)$ 为 n 的二进制表示下的数码和，至少为 1. 于是 $v_2((2k+2)!)\geq 2k+1$. 因此

$$v_2\left((p^2-1)^k\mathrm{C}_n^{2k+2}\right)\geq ak+b-2k-1\geq 3k+b-2k-1\geq b.$$

$k=0$ 时，$v_2\left((p^2-1)^k\mathrm{C}_n^{2k+2}\right)=v_2(\mathrm{C}_n^2)=b-1$.

于是 $\sum_{k=0}^{[n/2]-1}(-1)^k(p^2-1)^k\mathrm{C}_n^{2k+2}$ 是 2^{b-1} 的倍数，但不是 2^b 的倍数，故不可能等于 0，矛盾.

因此原命题得证.

2

1. 已知 p为奇素数，$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$，满足 $\cos\alpha=\frac{1}{p}$. 求证：对任意大于 1的整数 n，均不存在正整数 m，使得 $\cos n\alpha=\frac{1}{m}$.

假设结论不成立，即存在正整数 $n>1$和 m，使得 $\cos n\alpha=\frac{1}{m}$. 由 $$e^{\mathrm{i}\cdot(\pm\alpha)}=\cos\alpha\pm\mathrm{i}\sin\alpha=\frac{1}{p}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}$$ 知：$$e^{\mathrm{i}\cdot(\pm n\alpha)}=\cos n\alpha\pm\mathrm{i}\sin n\alpha=\left(\frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{p^2-1}}{p}\right)^n$$ 于是 $$\begin{aligned}\cos n\alpha=&\frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{p^2-1})^n+(1-\mathrm{i}\sqrt{p^2-1})^n}{2p^n}\\=&\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k(p^2-1)^k\mathrm{C}_n^{2k}}{p^n}=\frac{1}{m}\end{aligned}$$ 由于 p是素数，必存在正整数 $l\le n$，使得 $m=p^l$，$\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k(p^2-1)^k\mathrm{C}_n^{2k}=p^{n-l}$. 注意到 $$\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k(p^2-1)^k\mathrm{C}_n^{2k}\equiv\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}\mathrm{C}_n^{2k}=2^{n-1}\pmod{p}$$ 若 $l<n$，则必有 $p\mid 2$，于是 $p=2$，这与 p是奇素数矛盾，因此 $l=n$. 此时有 $$\sum\limits_{k=0}^{[n/2]-1}(-1)^k(p^2-1)^k\mathrm{C}_n^{2k+2}=0$$ 考虑左边 2的幂次. 于是设 $

v_{2}(p^{2}-1)=a$，$v_{2}(n(n-1))=b$. 由 p为奇数知 $a\ge 3$. 于是对任意 $k\ge 1$，都有 $$\begin{aligned}&v_{2}\left((p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k+2}\right)=v_{2}((p^{2}-1)^{k})+v_{2}(\mathrm{C}_{n}^{2k+2})\\=&ak+v_{2}(n(n-1)\cdots(n-2k-1))-v_{2}((2k+2)!)\\\ge&ak+b-v_{2}((2k+2)!)\end{aligned}$$ 由 Legendre 定理，$v_{2}((2k+2)!)=2k+2-S_{2}(2k+2)$，其中 $S_{2}(n)$为 n的二进制表示下的数码和，至少为 1. 于是 $v_{2}((2k+2)!)\ge 2k+1$. 因此 $$v_{2}\left((p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k+2}\right)\ge ak+b-2k-1\ge 3k+b-2k-1\ge b.$$ $k=0$时，$v_{2}\left((p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k+2}\right)=v_{2}(\mathrm{C}_{n}^{2})=b-1$. 于是 $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]-1}(-1)^{k}(p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k+2}$是 2^{b-1}的倍数，但不是 2^{b}的倍数，故不可能等于 0，矛盾. 因此原命题得证.

解答（PDF 中已展开）

\ex 已知p为奇素数，$\alpha\in[0,\frac{\pi}{2}]$，满足$\cos\alpha=\frac{1}{p}$. 求证：对任意大于$1$的整数$n$，
↪ 均不存在正整数m，使得$\cos n\alpha=\frac{1}{m}$.
\begin{proof}假设结论不成立，即存在正整数$n>1$和m，使得$\cos n\alpha=\frac{1}{m}$. 由$$e^{\mathrm{i}\cdot
↪ (\pm\alpha)}=\cos\alpha\pm\mathrm{i}\sin\alpha=\frac{1}{p}\pm\mathrm{i}\frac{\sqrt{p^{2}-1}}{p}$$
知：
$$e^{\mathrm{i}\cdot (\pm n\alpha)}=\cos n\alpha\pm\mathrm{i}\sin n\alpha=\left(\frac{1\pm\mathrm{i}\sqrt{p^{2}-1}}{p}\right)^{n}$$
于是$$\begin{aligned}\cos n\alpha=&\frac{(1+\mathrm{i}\sqrt{p^{2}-1})^{n}+(1-\mathrm{i}\sqrt{p^{2}-1})^{n}}{2p^{n}}\\=&\dfrac{\su」
↪ m\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^{k}(p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k}}{p^{n}}=\frac{1}{m}\end{aligned}$$
由于p是素数，必存在正整数$l\le n$，使得$m=p^{l}$，
↪ $\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^{k}(p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k}=p^{n-l}$.
↪ 注意到$$\sum\limits_{k=0}^{[n/2]}(-1)^{k}(p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k}\equiv
↪ \sum\limits_{k=0}^{[n/2]}\mathrm{C}_{n}^{2k}=2^{n-1}\pmod{p}$$
若 $l<n$，则必有 $p\mid 2$，于是 $p=2$，这与 p 是奇素数矛盾，因此 $l=n$. 此时有
$$\sum\limits_{k=0}^{[n/2]-1}(-1)^{k}(p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k+2}=0$$
考虑左边 2 的幂次. 于是设 $v_{2}(p^{2}-1)=a$，$v_{2}(n(n-1))=b$. 由 p 为奇数知 $a\ge 3$.
于是对任意$k\ge 1$，都有$$\begin{aligned}&v_{2}\left((p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k+2}\right)=v_{2}((p^{2}-1)^{k})+v_{2}(\mat」
↪ hrm{C}_{n}^{2k+2})\\=&ak+v_{2}(n(n-1)\cdots(n-2k-1))-v_{2}((2k+2)!)\\\ge&ak+b-v_{2}((2k+2)!)\end{aligned}$$
由Legendre定理，$v_{2}((2k+2)!)=2k+2-S_{2}(2k+2)$，其中$S_{2}(n)$为$n$的二进制表示下的数码和，至少为$1$.
↪ 于是$v_{2}((2k+2)!)\ge 2k+1$. 因此$$v_{2}\left((p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k+2}\right)\ge ak+b-2k-1\ge 3k+b-2k-1\ge b.$$
$k=0$ 时，$v_{2}\left((p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k+2}\right)=v_{2}(\mathrm{C}_{n}^{2})=b-1$.
于是$\sum\limits_{k=0}^{[n/2]-1}(-1)^{k}(p^{2}-1)^{k}\mathrm{C}_{n}^{2k+2}$是$2^{b-1}$的倍数，但不是$2^{b}$的倍数，
↪ 故不可能等于0，矛盾.
因此原命题得证. \end{proof}