2021 年爱沙尼亚 TST

2022-01-13 原文链接

网站版本 379b168aed55 · 文章 ID h_f9b22bd5218ecae6

第一天

1. Juku 在家中收藏了《Harrie Totter》系列丛书的前 100 册. 对任意 $1 \leq i < j \leq 100$，如果书架上第 j 册摆在第 i 册之前，则称有序数对 (i, j) 是颠倒的. Juku 想把所有的书按照某种顺序摆在书架上，使得不存在 $1 \leq i < j < k \leq 100$，满足 (i, j) 和 (j, k) 均是颠倒的. 在此情况下，最多可能有多少个颠倒的数对?

2. 求所有整系数多项式 $P(x)$，使得它在 1，2，$\cdots$，2021 处的值恰好为 1，2，$\cdots$，2021 的某个排列.

3. 2020 年 IMO SL G3

第二天

1. (a) 平面上有 $2n$ 条被标记的射线，n 为常数. 已知任意两条被标记射线的端点和方向均不同，求证：存在一条不通过任意被标记的射线端点，且恰好和 n 条被标记的射线相交的直线.
   (b) 如果去掉 “任意两条被标记射线的端点均不同” 这一条件，结论是否成立?

2. 正实数 a，b，c 满足 $abc = 1$. 求证：
$$\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq \frac{3}{2}$$

3. 2020 年 IMO SL N4

第三天

1. 2020 年 IMO SL C1

2. 2020 年 IMO SL G1

3. 2020 年 IMO SL N2

第四天

1. 黑板上写有一个大于 1 的自然数. 在每一步操作中，Igor 擦去黑板上的数字 n，并写上 $n + \dfrac{n}{p}$，其中 p 为 n 的某个素因子.
   求证：如果 Igor 一直进行如上操作，他能无穷多次选取 3 作为上述的素因子 p.

2. 求所有实系数多项式 $P(x, y)$，使得对于任意实数 x 和 y，都有 $P(x+y, x-y) = 2P(x, y)$.

3. 2020 年 IMO SL G4